Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen:

Dieses Buch ist in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra zu dem Zweck entwickelt worden, um mit dem Taschencomputer (TC) ein durchgängiges Konzept für einen effektiven Unterricht zu haben. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines TC geeignet sind.
Im Schulversuch konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht mit diesem Aufgabenmaterial und dem Einsatz eines Taschencomputers einen Mehrwert an mathematischer Kompetenz erbringen bzw. diese wesentlich unterstützen kann. Es konnte auch gezeigt werden, dass durch den Einsatz des Taschencomputers die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler unterstützt und eine Vorgehens-reflexion gefördert wurde. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschen-computer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird.
Um den Schülerinnen und Schülern mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übertragen, ist es sinnvoll, ihnen Gelegenheit zur Selbsteinschätzung vor einer bewerteten Leistungskontrolle zu geben. Mit den "Ich kann ..."-Fragen werden die zum jeweiligen Thema wichtigsten inhaltlich gebundenen Fähigkeiten und Fertigkeiten der jeweiligen Unterrichtseinheit beschrieben.
Die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten sind so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützen und fördern. Zu dem Themen-heft für Schülerinnen und Schüler gibt es entsprechend entwickelte Handreichungen für Sie.

Dieses Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Problemlösen lernen**
2. **Quadratische Zusammenhänge**
3. **TC-Hilfen**
4. **Kopfübungen - Basiswissen**

Im ersten Kapitel steht das Erarbeiten und Entdecken von Problemlösestrategien im Vordergrund. Den Schülerinnen und Schülern soll bewusst gemacht werden: *Was hat mir geholfen, eine schwierige Aufgabe oder ein Problem zu lösen?* Mit den Beispielen können sie ihren eigenen „Werkzeugkasten“ mit Strategien und Hilfsmitteln füllen, der sie befähigt, auch künftige Probleme zu meistern. Es bietet sich an, auf die erlernten Problemlösestrategien in den folgenden Unterrichtseinheiten immer wieder zurückzugreifen und sie gegebenenfalls mit den Aufgaben wieder zu trainieren. Daher haben wir zu den Problemlöseaufgaben verschiedene Lösungsmöglichkeiten hinzugefügt.

Der Einstieg in die Unterrichtsreihe des 2. Kapitels erfolgt über Optimierungsaufgaben. Die dazu benötigten quadratischen Funktionen werden zum einen in faktorisierter Form (Kaninchenstall, Theatereinnahmen), zum anderen in allgemeiner Form (Acapulco-Springer, Benzinverbrauch) in arbeitsteiliger Gruppenarbeit untersucht. Durch die Vorstellung der Ergebnisse wird der neue Graphentyp eingeführt und werden die zugehörigen Begriffe quadratische Funktion, Parabel, allgemeine Form, faktorisierte Form, Normalparabel, Scheitelpunkt thematisiert.

Arbeitsteilig wird im Anschluss mithilfe des TC sowohl die allgemeine Form als auch die faktorisierte Form der Funktionsgleichung hinsichtlich des Einflusses der Parameter auf die Lage des Graphen untersucht. Dabei ist die Untersuchung durch die Formulierung der Aufgabenstellung zunächst sehr angeleitet und dann schrittweise offener angelegt. Es ist intendiert, dass die neuen Terme mehrfach eingeben werden müssen und eingabeverkürzende Möglichkeiten des TC im Hintergrund bleiben. Die Zusammenführung der Ergebnisse ermöglicht eine gründliche Strukturanalyse: Streckung, Streckfaktor a, Öffnung, Symmetrie der Parabel, y-Achsenabschnitt c, Zusammenhang zwischen Lage der Nullstellen (m und n) und x-Wert des Scheitelpunktes. Durch eine Standortbestimmung in tabellarischer Form werden die Vorzüge der einzelnen Darstellungsformen der quadratischen Funktionen und somit die jeweils günstige Darstellungsformen zum Lösen von Standardaufgaben erfahren. Im weiteren Verlauf der Unterrichtsreihe werden aus vorgegebenen Punkten Funktionsgleichungen von Parabeln zu erstellt. Zunächst erfolgt dies auf der Basis dreier ausgezeichneter Punkte (Scheitelpunkt und zwei weitere) händisch. An dieser Stelle wird auf die Lösung über lineare Gleichungssysteme bewusst verzichtet. Im Folgenden werden Punktwolken durch die Nutzung des Regressionsmoduls beschrieben. Grenzen der Modellierung werden ebenfalls aufgezeigt. Im Sinne der Ergebnissicherung werden abschließend zu einzelnen grundlegenden Problemstellungen Flussdiagramme erarbeitet, die die Vorgehensweise zu deren Lösung veranschaulichen. Dabei fließen auch die Ergebnisse aus den Langzeitaufgaben ein. Bei der Betrachtung der Parabel als Ortslinie wird die Untersuchung auf den Ort aller Punkte beschränkt, die zu einem Punkt und zu einer Geraden gleichen Abstand haben.

Den Abschluss bilden einige sogenannte Kopfaufgaben und Aufgaben zum Basiswissen.
Vermischte Kopfübungen sind eine **rituelle Lerngelegenheit** für das Wachhalten von mathematischem Grundwissen aus früheren Themen und Klassenstufen. Sie enthalten jeweils Grundaufgaben bzw. deren Umkehrungen zu verschiedenen nicht zum aktuellen Stoff gehörenden Begriffen, Verfahren oder Zusammenhängen, die dauerhaft verfügbar sein sollen. Sie sind Teil einer Selbsteinschätzung der Lernenden mit dem Ziel, Aktivitäten zum Füllen individueller Lücken anzuregen.
In jedem Unterrichtsbaustein lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie deren typische Anwendungen kennen. Diese Lerninhalte sind auch für erfolgreiches Weiterlernen von zentraler Bedeutung. Wir nennen solche Lerninhalte kurz: **Basiswissen.** In diesem Teil finden Sie Aufgaben, die alle wichtigen Basiskompetenzen der vergangenen Jahre aus den Bereichen Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionale Zusammenhänge sowie Daten und Zufall wiederholen. Hier finden Sie einfache Aufgaben, für den Fall, dass die Schülerinnen und Schülern wenig Erinnerung haben, aber auch komplexere Aufgaben, um zu testen, wie viel noch gekonnt wird. Die Aufgaben aus diesem Teil helfen durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an mathematische Kenntnisse und mobilisieren ihre Fertigkeiten sowie Fähigkeiten. Langfristig kann sich so eine hohe mathematische Kompetenz entwickeln und ein gutes Basiswissen entwickeln. Diese Aufgaben zum Basiswissen sind so gestaltet worden, dass sie auch gleichzeitig eine Vorbereitung auf das nächste Kapitel sind.
Die Autoren dieses Themenheftes wünschen Ihnen mit dem Taschencomputer und den Arbeitsmaterialien im Verbund den Handreichungen viel Erfolg!

Bergkirchen im Mai 2009

I N H A L T S V E R Z E I C H N I S

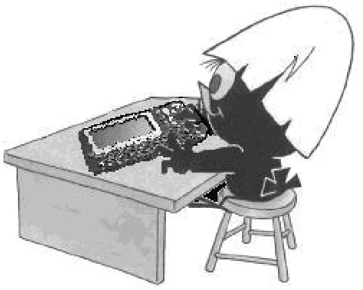
Problemlösen lernen

Quadratische Zusammenhänge

Training

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



© PAGOT

Problemlösen lernen

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

1. Verlauf der Einheit "Problemlösen lernen mit Marinda"

Thema: Problemlösestrategien	
Die folgenden Arbeitsmaterialien dienen als fakultative, technologiefreie Einheit für den Jahrgang 8. Hierbei steht das Erarbeiten und Entdecken von Problemlösestrategien im Vordergrund. Die Schülerinnen und Schüler sollen sich darüber bewusst werden, was ihnen geholfen hat, eine schwierige Aufgabe oder ein Problem gelöst zu haben. Ein Repertoire an heuristischen Prinzipien, Strategien und Hilfsmittel soll sie befähigen, auch künftige Probleme zu meistern. Die Arbeitsblätter sind von den Schülerinnen und Schülern weitgehend selbstständig zu bearbeiten und daher auch für den Einsatz in Vertretungsstunden geeignet. Dennoch sollte eine rückwirkende Besprechung durch die Fachlehrkraft auf jeden Fall erfolgen.	
Unterrichtsorganisation: freigestellt	**Dauer der Unterrichtseinheit:** ca. 5 Stunden
Besondere Materialien/Technologie: Schülerarbeitsblätter, Folien	**Notwendige Vorkenntnisse:** keine

Hinweise:

Im Schülermaterial sind die Lösungen enthalten. Dadurch hat die Lehrkraft jederzeit die Möglichkeit, die Aufgaben des Problemlösenlernens zum Beispiel in Langzeit-Hausaufgaben von den Schülerinnen und Schülern in Selbstkontrolle wiederholen zu lassen. Entscheidend für ein auswertendes Unterrichtsgespräch ist der Rückblick auf die Aufgabe 6 auf der Seite 14 im "Band 5: Arbeitsmaterialien für Schülerinnen und Schüler".

Weitere Informationen zum Problemlösenlernen sind der Literatur zu entnehmen.[1]

Die Schülerinnen und Schüler legen in den folgenden Unterrichtseinheiten einen sogenannten Wissensspeicher[2] (DIN-A4-Hefter) an. In dem Wissensspeicher werden zukünftige Merksätze gesammelt, aber auch Skizzen und Hinweise auf typische Anwendungen. Daher könnte das erste Blatt z. B. diesen Inhalt haben:

---

[1] Bruder, R.: Lernen, geeignete Fragen zu stellen, Heuristik im Mathematikunterricht. In: mathematik lehren, Heft 115, 2002
Abels, L.: Ich hab´s – Tipps, Tricks und Übungen zum Problemlösen. In: Mathe-Welt, mathematik lehren, Heft 115, 2002

[2] Bruder, R.: Mathematik lernen und behalten. In: PÄDAGOGIK, Heft 10, 2001

Wie kann ich vorgehen, wenn ich eine schwierige Aufgabe mathematisch lösen möchte?

Mein Problemlösemodell sieht so aus:

Ich mache mir immer erst eine Skizze.	
Die soll aber nur das Wichtigste enthalten.	*typisches Beispiel*
Manchmal hilft es, mit einem Beispiel	
zu probieren.	*typisches Beispiel*
Wenn man alle Beispiele finden will,	
macht man das systematisch in einer Tabelle.	*typisches Beispiel*

Es bietet sich an, auf die erlernten Problemlösestrategien auch in folgenden Unterrichteinheiten immer wieder zu verweisen („Was hat uns damals geholfen ...?“).

2. Lösungsvorschläge

Aufgabe 1

16 Reihen zu 13 Schildkröten ergeben 208 Schildkröten. Es stehen vorn und hinten jeweils 13 in einer Reihe und an den beiden Seiten dann noch je 14, weil die Schildkröten an den Ecken ja nicht doppelt gezählt werden müssen. Summe: 54 Schildkröten benötigen einen Kampfpartner.

Strategie: Vorwärtsarbeiten, Hilfsmittel: Informative Figur – Rechteck

Aufgabe 2

Insgesamt kann der Besen 418 kg tragen. Der König der Bären dürfte dann maximal 210 kg wiegen.

Strategie: Vorwärts- und Rückwärtsschließen in Kombination, Hilfsmittel: Additionsmauer als eine Möglichkeit zur Veranschaulichung der Teilschritte

Aufgabe 3

a) Gewinnstrategie: Marinda muss die von der Schildkröte jeweils gezogene Tellerzahl bis 6 ergänzen. 36 ist durch 6 teilbar, also kann Marinda bei Einhaltung dieser Strategie immer gewinnen.

b) Wenn es nun 35 Teller wären, gäbe es z. B. folgende Möglichkeiten, die Regeln neu zu bestimmen: Entweder entnimmt man eine Zahl Teller zwischen 1 und 4, man würde damit zu allen Vielfachen der Zahl 5 (also auch 35) ergänzen können, oder man entnimmt eine Zahl zwischen 1 und 6, womit zu allen Vielfachen der Zahl 7 ergänzt werden könnte. In beiden Fällen müssten aber die Schildkröten beginnen. Vergisst man diese Klausel, hat man das Spiel sicher verloren.

c) Im Falle der Zahl 37 müsste Marinda die Regeln so ändern, dass sie beginnt und die zu entnehmende Tellerzahl auf 1 bis 5 festlegt. Würde sie dann beginnen, indem sie einen Teller wegnimmt, wären schließlich wieder die Bedingungen der Teilaufgabe a) gegeben.

Strategie: Rückwärtsarbeiten und Invarianzprinzip, Tabelle als Darstellungsmöglichkeit der verschiedenen Fälle

Aufgabe 4

1056 Melonen

Strategie: Zerlegungs- bzw. Ergänzungsprinzip

Aufgabe 5

Es waren 138 Schildkröten zum Schloss unterwegs.

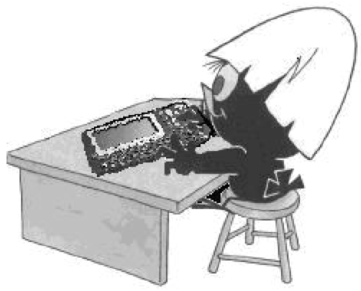
Strategie: Visualisierung der Anteile anhand eines Streifens oder einer Strecke, Rückwärtsarbeiten

Aufgabe 6

—

C A l i M E R O

Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren



© PAGOT

Quadratische Zusammenhänge

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Ablauf der Unterrichtssequenz als Flussdiagramm

Einstieg
(2 Std.)

Faktorisierte Form (FF)
Kaninchenstall
Theatereinnahmen

Allgemeine Form (AF)
Acapulco-Springer
Benzinverbrauch

Phase I
(2 Std.)

Graphenlabor FF

Graphenlabor AF

Strukturerkennung

Phase II
(2 Std.)

Graphenlabor **Scheitelpunktform** (SPF)

(1 Std.)

Tabellarische Zusammenfassung
der verschiedenen Darstellungen (AF, FF, SPF) quadratischer Funktionen unter dem Aspekt der jeweiligen Vorzüge

Langzeitaufgabe
(Selbstlernen)
Händische Grundfertigkeiten
- Zeichnen
- Schnittpunkte
- Nullstellen, Scheitelpunkte

Übungen
(4 Std.)

Vielfältiges Problemlösen und Üben

Phase III
(3 Std.)

Modellieren und Regression

(3 Std.)

Zusammenstellung von Grundstrategien
Umwandlungen der verschiedenen Formen /
Strategien zum Lösen von Standardproblemen
(Scheitelpunktbestimmung, Nullstellenbestimmung etc.) mithilfe des TC und händisch

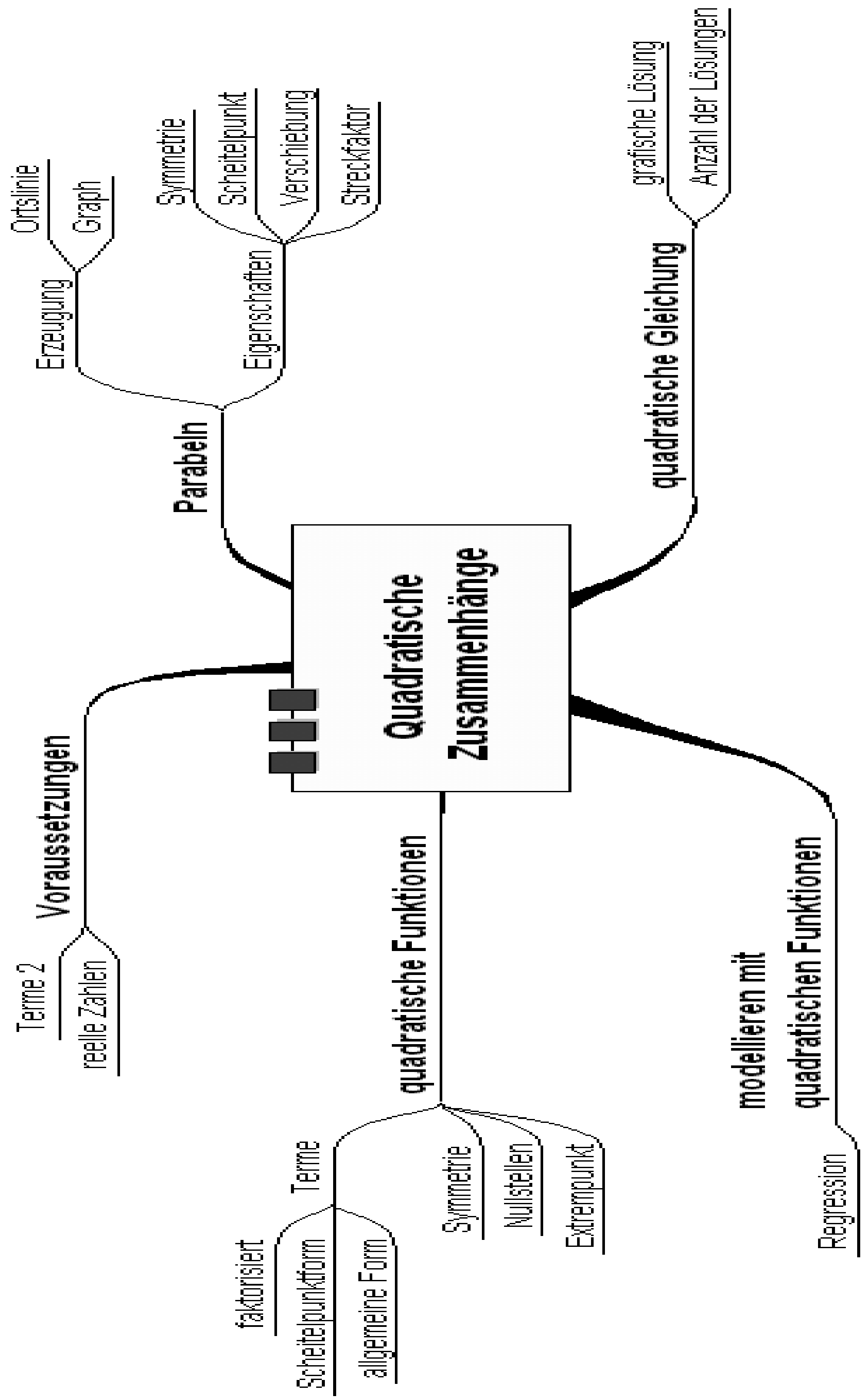
Phase IV
(2 Std.)

Geometrie der Parabel
Parabel als **Ortslinie**

Didaktisch-methodischer Kommentar zur Konzeption der Unterrichtsreihe

Der Einstieg in die Unterrichtsreihe erfolgt über Optimierungsaufgaben. Die dazu benötigten quadratischen Funktionen werden zum einen in faktorisierter Form (Kaninchenstall, Theatereinnahmen), zum anderen in allgemeiner Form (Acapulco-Springer, Benzinverbrauch) in arbeitsteiliger Gruppenarbeit untersucht. Die Vorstellung der Ergebnisse durch die Gruppen mündet in die Einführung des neuen Graphentyps und der zugehörigen Begriffe quadratische Funktion, Parabel, allgemeine Form, faktorisierte Form, Normalparabel, Scheitelpunkt.
Arbeitsteilig werden im Anschluss mithilfe des TC sowohl die allgemeine Form als auch die faktorisierte Form der Funktionsgleichung hinsichtlich des Einflusses der Parameter auf die Lage des Graphen untersucht. Dabei ist die Untersuchung durch die Formulierung der Aufgabenstellung zunächst sehr angeleitet und dann schrittweise offener angelegt. Es ist intendiert, dass die Schülerinnen und Schüler die für sie neuen Terme mehrfach eingeben müssen und eingabeverkürzende Möglichkeiten des TC im Hintergrund bleiben. Die Zusammenführung der Ergebnisse ermöglicht eine gründliche Strukturanalyse: Streckung, Streckfaktor a, Öffnung, Symmetrie der Parabel, y-Achsenabschnitt c, Zusammenhang zwischen Lage der Nullstellen (m und n) und x-Wert des Scheitelpunktes.
Im Rahmen von als Selbstlerneinheit konzipierten Langzeitaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler parallel zur Fortführung des Unterrichtsganges händische Grundfertigkeiten (Zeichnen, Bestimmen von Nullstellen und Scheitelpunkten, Lösen einfacher quadratischer Gleichungen) erlernen und üben.
In einem weiteren Graphenlabor wird die Wirkung der Parameter d und e in der Scheitelpunktform untersucht. Im Gegensatz zur den vorigen Untersuchungen werden hier weitere Möglichkeiten des TC (CAS, Makro, „with"-Operator) genutzt.
In einer Standortbestimmung werden tabellarisch die Vorzüge der einzelnen Darstellungsformen der quadratischen Funktionen aufgelistet und den Schülerinnen und Schülern somit jeweils günstige Darstellungsformen zum Lösen von Standardaufgaben an die Hand gegeben.
Es schließt sich eine intensive Übungs- und Anwendungsphase an, in der mit Rechnerhilfe variantenreich Problemstellungen zu bearbeiten sind. Hier wird auch der Wechsel zwischen den einzelnen Formen thematisiert. Im vorliegenden Konzept soll dieser Wechsel unter Verzicht auf pq-Formel und quadratische Ergänzung erreicht werden. Als Strategien werden Ausmultiplizieren bzw. Faktorisieren mit TC-Befehlen („expand", „factor") verwendet. Analytisch konstruktiv kann über Mittelwertbildung (Nullstellen → x-Koordinate des Scheitelpunktes → y-Koordinate des Scheitelpunktes) bzw. bei nicht faktorisierbaren Funktionstermen über die TC-Befehle „fMin/fMax" die Funktionsgleichung in der Scheitelpunktform aufgestellt werden.
In der folgenden Sequenz werden aus vorgegebenen Punkten Funktionsgleichungen von Parabeln erstellt. Zunächst erfolgt dies auf der Basis dreier ausgezeichneter Punkte (Scheitelpunkt und zwei weitere) händisch. An dieser Stelle wird auf die Lösung über lineare Gleichungssysteme bewusst verzichtet. Im Folgenden werden Punktwolken durch die Nutzung des Regressionsmoduls beschrieben. Grenzen der Modellierung werden ebenfalls aufgezeigt.
Im Sinne der Ergebnissicherung werden mit den Schülerinnen und Schülern abschließend zu einzelnen grundlegenden Problemstellungen Flussdiagramme erarbeitet, die die Vorgehensweise zu deren Lösung veranschaulichen. Dabei fließen auch die Ergebnisse aus den Langzeitaufgaben ein.
Bei der Betrachtung der Parabel als Ortslinie wird die Untersuchung auf den Ort aller Punkte beschränkt, die zu einem Punkt und zu einer Geraden gleichen Abstand haben.

Mind Map mit Inhalten



Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen, …	kommunizieren
präzisieren Vermutungen und machen sie einer mathematischen Überprüfung zugänglich, auch unter Verwendung geeigneter Medien beschaffen sich notwendige Informationen für mathematische Argumentationen und bewerten diese erläutern mathematische Sachverhalte, Begriffe, Regeln, Verfahren und Zusammenhänge unter Zuhilfenahme formaler Darstellungen vergleichen und bewerten verschiedene Lösungsansätze und Lösungswege	nutzen Parametervariationen nutzen Darstellungsformen wie Terme und Gleichungen zur Problemlösung wenden algebraische, numerische, grafische Verfahren oder geometrische Konstruktionen zur Problemlösung an ziehen die Möglichkeit mehrerer Lösungen in Betracht und überprüfen diese beurteilen ihre Ergebnisse, vergleichen und bewerten Lösungswege und Problemlösestrategien	finden und bewerten mögliche Einflussfaktoren in Realsituationen wählen Modelle zur Beschreibung überschaubarer Realsituationen und begründen ihre Wahl verwenden Terme mit Variablen, Gleichungen, Funktionen oder Regressionen zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell interpretieren die im Modell gewonnenen Ergebnisse im Hinblick auf die Realsituation, reflektieren die Annahmen und variieren diese gegebenenfalls	stellen funktionale Zusammenhänge durch Tabellen, Graphen oder Terme dar, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners, interpretieren und nutzen solche Darstellungen stellen geometrische Sachverhalte algebraisch dar und umgekehrt zeichnen Schrägbilder von Prismen, entwerfen Netze und stellen Modelle her stellen Zufallsversuche durch Baumdiagramme dar und interpretieren diese	erfassen und beschreiben Zuordnungen mit Variablen und Termen nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung linearer und quadratischer Zusammenhänge können überschaubare Terme mit Variablen zusammenfassen, ausmultiplizieren und aus-klammern, um mathematische Probleme zu lösen nutzen tabellarische, grafische und algebraische Verfahren zum Lösen linearer und quadratischer Gleichungen nutzen den eingeführten Taschenrechner zur Kontrolle nutzen den eingeführten Taschenrechner und Geometriesoftware zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammen-hänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen nutzen den eingeführten Taschenrechner beim Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen	teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie zunehmend die Fachsprache benutzen präsentieren Lösungsansätze und Lösungswege, auch unter Verwendung geeigneter Medien verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und gehen darauf ein strukturieren, interpretieren, analysieren und bewerten Daten und Informationen aus Texten und mathematikhaltigen Darstellungen organisieren die Arbeit im Team selbstständig

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
beschreiben Sachverhalte durch Terme und Gleichungen veranschaulichen und interpretieren Terme erkennen und vergleichen die Struktur von Termen nutzen Terme und Gleichungen zur mathematischen Argumentation modellieren inner- und außermathematische Problemsituationen mithilfe von Termen und Gleichungen formen Terme mithilfe der Rechengesetze um lösen lineare und quadratische Gleichungen sowie lineare Gleichungssysteme mit zwei Variablen in einfachen Fällen algebraisch lösen Gleichungen und Gleichungssysteme in Sachzusammenhängen durch Probieren, numerisch und grafisch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners untersuchen Fragen der Lösbarkeit von Gleichungen und Gleichungssystemen und formulieren diesbezüglich Aussagen nutzen beim Gleichungslösen die Probe zur Kontrolle und beurteilen die Ergebnisse untersuchen, beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners	entnehmen Maßangaben aus Quellenmaterial, führen Berechnungen durch und bewerten die Ergebnisse sowie den gewählten Weg	beschreiben und erzeugen geometrische Objekte: Kreis, Parallele, Mittelsenkrechte, Winkelhalbierende und Parabel als Ortslinie	erkennen lineare und quadratische Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal und erläutern sie identifizieren und klassifizieren lineare und quadratische Funktionen in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen nutzen lineare und quadratische Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners stellen lineare und quadratische Funktionen durch Terme und Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Term, Gleichung, Tabelle, Graph modellieren Sachsituationen durch lineare und quadratische Funktionen wenden die Eigenschaften der linearen und quadratischen Funktionen auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners zur Lösung von Problemen an und bewerten die Lösungen deuten die Parameter linearer und quadratischer Funktionen in der grafischen Darstellung und nutzen diese in Anwendungssituationen untersuchen, beschreiben und begründen Auswirkungen von Parametervariationen bei linearen und quadratischen Funktionen unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners bestimmen die Funktionsgleichung von linearen und quadratischen Funktionen aus dem Graphen	stellen Datenpaare grafisch dar, führen lineare und quadratische Regressionen unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners durch und nutzen die Ergebnisse für Prognosen

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit „Quadratische Zusammenhänge" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fertigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in der Klassenarbeit oder in Kurztests nachgewiesen beziehungsweise abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. anhand der jeweiligen Form des Terms der quadratischen Funktion Informationen über den Graphen entnehmen und je nach den gegebenen Informationen skizzieren können.
   - Scheitelpunktform: Scheitelpunkt, Öffnung, Streckung, Verschiebung
   - faktorisierte Form: Nullstellen, Öffnung, Symmetrieachse
   - allgemeine Form: Öffnung, Streckung
2. quadratische Gleichungen lösen
   - der Form $ax^2 + bx = 0$
   - der Form $ax^2 + c = 0$
   - in faktorisierter Form oder Scheitelpunktform
   - grafische Lösung über Schnitt von Parabel und Gerade für einfache Fälle.

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Wechsel zwischen den unterschiedlichen Darstellungen
2. $\frac{20}{3}x^2 - 2x + \frac{3}{20} = 0$ mittels „solve"-Befehl bzw. durch grafisches Lösen
3. Regression und Modellkritik von Punktwolken mittels TC

Anmerkung: **pq-Formel und quadratische Ergänzung fallen in unserem Konzept weg.**

Zuwachs an Rechnerkenntnis

1. Grafisches Bestimmen von Minimum, Maximum
2. „fMin", „fMax"
3. „QuadReg"

Thema 1.: Einführung quadratischer Zusammenhänge	**Dauer:** 2 Stunden
Verschiedene selbstständig zu bearbeitende Aufgaben führen in das Themenfeld Quadratische Zusammenhänge ein. Insbesondere führen sie zur Entdeckung eines neuen Funktionstyps, der sich hinsichtlich Term, Tabelle und Graph von den bislang bekannten Typen unterscheidet. Dieser Funktionstyp bekommt den Namen quadratische Funktion.	
Besondere Materialien/Technologie: TC SM: Blatt 1.1.1 und 1.1.2 Mehrere Handfolien in Größe A4, Folienstifte	

Ablauf der Stunden

Inhalt	Medien	Kommentar
Erarbeitung (30 Minuten): Die Aufgaben 1 und 2 befassen sich mit der faktorisierten, die Aufgaben 3 und 4 mit der allgemeinen Form. In arbeitsteiliger GA wird von den Gruppen je eine Aufgabe bearbeitet. Wichtige Ergebnisse werden auf Folien für die spätere Präsentation festgehalten.	SM 1.1/ 1.1, Folien, TC	Arbeitsteilige GA
Präsentation/Begriffsklärung (60 Minuten): Die einzelnen Gruppen stellen ihre Ergebnisse mithilfe des TC und der angefertigten Folien vor. Die Begriffe quadratische Funktion, allgemeine Form, faktorisierte Form, Parabel, Normalparabel und Nullstelle werden eingeführt.	Folien, TC	Präsentation, UG

Langzeitaufgabe zu händischen Fertigkeiten	**Dauer: 2 Wochen**
Im Rahmen von als Selbstlerneinheit konzipierten Langzeitaufgaben sollen die Schülerinnen und Schüler parallel zur Fortführung des Unterrichtsganges händische Grundfertigkeiten (Zeichnen, Bestimmen von Nullstellen und Scheitelpunkten, Lösen einfacher quadratischer Gleichungen) erlernen und üben. Im Unterrichtsgang ist kein eigenständiges Kapitel zum Lösen quadratischer Gleichungen vorgesehen. Insbesondere auf Lösungsmethoden mithilfe quadratischer Ergänzung oder der pq-Formel wird verzichtet. Das Lösen quadratischer Gleichungen ohne konstantes Glied ($ax^2+bx=0$) bzw. ohne linearen Anteil ($ax^2+c=0$) wird an dieser Stelle innerhalb der Langzeitaufgabe erlernt und geübt. Schwierigere Gleichungen sollen mit dem „solve“-Befehl gelöst werden. Extremwerte werden z. B. mit „fMin“ bzw. „fMax“ oder grafisch bestimmt. Nach zwei Wochen werden die Langzeitaufgaben eingesammelt und kontrolliert. Die Besprechung wichtiger Ergebnisse findet im Rahmen der Zusammenstellung am Ende der Unterrichtseinheit statt (vgl. Flussdiagramm zur Unterrichtseinheit, S.13).	
Besondere Materialien/Technologie: SM 6.1 – 6.5	

Thema 2.1.: Graphenlaboratorium 1 und 2	**Dauer:** 2 Stunden
Die Schüler untersuchen anhand von geeigneten Beispielen die Auswirkungen der Parameter auf den Graphen einer Parabel. Ziel: Die Auswirkungen der Parameter in der allgemeinen Form und in der faktorisierten Form auf den Funktionsgraphen sollen erkannt werden. Dabei werden die Begriffe Streckfakt, Schnittpunkt mit der y-Achse und Nullstelle eingeführt.	
Besondere Materialien/Technologie: TC	

Ablauf der Stunden:

Inhalt	Medien	Kommentar
Erarbeitung (45 Minuten): Arbeitsteilig sollen von den Schülern in GA die Graphenlaboratorien 1 und 2 bearbeitet werden. Die Aufgaben sind in dieser Phase hinreichend eng formuliert, so dass die Schüler schrittweise an ein systematisches Probieren mit dem TC herangeführt werden.	SM 2.1.1	Arbeitsteilige GA
Präsentation/Strukturerkennung (45 Minuten): Mithilfe des TC präsentieren verschiedene Gruppen ihre Ergebnisse. Diese werden im Unterrichtsgespräch systematisiert und gesichert. Hierzu kann der Wissensspeicher genutzt werden.	Tafel bzw. Wissens-speicher	Präsentation, UG
Hausaufgabe: Die Vorbemerkungen zum Graphenlaboratorium 3 sollen durchgearbeitet werden. Verständnisprobleme sind konkret zu notieren.	SM 2.1.1	

Thema 2.1: Graphenlaboratorium 3	**Dauer:** 2 Stunden
Die Schüler untersuchen anhand von geeigneten Beispielen die Auswirkungen der Parameter auf den Graphen einer Parabel. Ziel: Die Auswirkungen der Parameter in der Scheitelpunktform auf den Funktionsgraphen sollen erkannt werden.	
Besondere Materialien/Technologie: TC	

Ablauf der Stunden:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der Hausaufgabe: Klären evtl. aufgetretener Probleme. Dabei sollte vor allem ein hinreichend sicherer Umgang der Schüler mit der TC-Syntax (Makro, „with"-Operator) gewährleistet sein, so dass im Weiteren der mathematische Inhalt von TC-Problemen nicht überlagert wird.	SM 2.1.1	UG „with"
Erarbeitung (35 bis 40 Minuten): In Partnerarbeit werden die Aufgaben 1 bis 6 bearbeitet. Die Zusatzaufgaben 7 bis 10 beleuchten weitere interessante Aspekte und können binnendifferenzierend für schnelle und leistungsstarke Schüler genutzt werden.	SM 2.1.1/ 2.1.2	PA
Präsentation/Strukturerkennung (45 Minuten): Mithilfe des TC präsentieren einige Schüler ihre Ergebnisse. Diese werden systematisiert und gesichert. Hierzu kann der Wissensspeicher genutzt werden.	Tafel bzw. Wissens-speicher	Präsentation, UG
Hausaufgabe Hinweis auf die Langzeitaufgaben!		

Thema 2.2.: Tabellarische Zusammenfassung	**Dauer:** 1 Stunde
Die Schüler sollen sich mithilfe der Tabelle (SM 2.2) einen systematischen Überblick über die drei Darstellungsformen quadratischer Funktionen verschaffen, indem sie einerseits Beispiele gegenüberstellen, andererseits Vor- und Nachteile der drei Formen im Hinblick auf direkte Ablesbarkeit von Informationen ermitteln.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.2, LM zu 2.2	

Ablauf der Stunde

Inhalt	Medien	Kommentar
Die Schüler sollen zunächst 10 Minuten alleine die Tabelle bearbeiten und sich dann mit einem Partner besprechen. Anschließend wird im Plenum die Folie ausgefüllt.	SM 2.2 Folie LM 2.2.1 LM 2.2.2	Ich-Du-Wir

Folienvorlage LM 2.2.1

Drei Darstellungsformen einer quadratischen Funktion

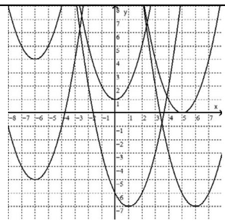
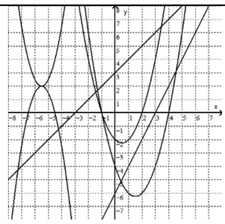
	Allgemeine Form	Faktorisierte Form	Scheitelpunktform
Beispiele			
Vorteile			
Nachteile			

Folienvorlage LM 2.2.2 ("Eine mögliche Lösung")

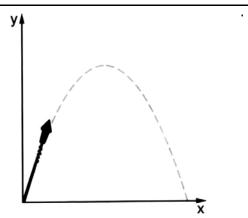
	Allgemeine Form	Faktorisierte Form	Scheitelpunktform
Beispiele	$x^2 - x - 2$ $-30x^2 + 150x + 1500$	$(x + 1) \cdot (x - 2)$ $-30(x + 5) \cdot (x - 10)$	$-30 \cdot (x - 2{,}5)^2 + 1687{,}5$
Vorteile	• Öffnung der Parabel (oben/unten) direkt ablesbar • Streckfaktor direkt ablesbar • Schnittpunkt mit y-Achse direkt ablesbar	• Nullstellen leicht zu ermitteln • Streckfaktor direkt ablesbar	• Scheitelpunkt leicht ablesbar • Streckfaktor direkt ablesbar
Nachteile	• Keine Information zum Scheitelpunkt • Keine Information zu den Nullstellen	• Keine Information zu dem Schnittpunkt mit der y-Achse • Keine Information zum Scheitelpunkt • Faktorisieren ist nur möglich, wenn Nullstellen vorhanden sind.	• Keine Information zum Schnittpunkt mit der y-Achse • Keine Information zu den Nullstellen

Thema 2.3.: Vielfältiges Problemlösen, Üben	**Dauer:** 5 Stunden
Die Schüler haben sich einen systematischen Überblick über die drei Darstellungsformen quadratischer Funktionen verschafft und dabei Vor- und Nachteile der drei Formen hinsichtlich der direkten Ablesbarkeit von Informationen erkannt. Diese Kenntnisse sollen hier vertieft werden. Dabei werden auch die Begriffe Scheitelpunkt, Nullstelle und Schnittpunkt mit der y-Achse vertieft thematisiert. Erkennen und Anwenden der Darstellungsformen wird geübt. Lösungsstrategien zur gegenseitigen Umwandlung der Darstellungsformen werden unter Verwendung des Rechners erarbeitet.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 2.3.1 bis 2.3.6	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Aus grafischen Abbildungen von Parabeln sollen die Funktionsgleichungen entnommen werden. 	SM 2.3.1 Aufg. 1, 2 PA	Einfacher Einstieg
Erweiterung: Aus vorgegebenen Funktionsgleichungen wird der Scheitelpunkt abgelesen und der Hoch- bzw. Tiefpunkt begründet.	SM 2.3.1 Aufg. 3 PA	Umkehrfragestellung
Vertiefung: Funktionsgleichungen unterschiedlicher Formen und Graphen werden einander zugeordnet. 	SM 2.3.1 Aufg. 4 PA	
Hausaufgabe:	SM 2.3.1 Aufg. 5, 6	

Ablauf der Stunde 2:

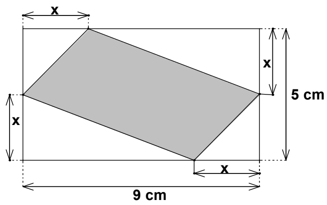
Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Anhand des Fluges einer Feuerwerksrakete werden die Nullstellen und der Hochpunkt der Parabel thematisiert. In diesem Zusammenhang kann der Befehl „factor“ eingeführt. 	SM 2.3.3 Aufg. 7 PA UG	Verschiedene Lösungen werden gesammelt und gegenübergestellt.

Vertiefung: Die Möglichkeit zur Faktorisierung wird geübt und die entsprechenden Aussagen werden abgelesen.	SM 2.3.3 Aufg. 8	Vornehmlich werden Funktionen der Bauart $f(x) = a\,x^2 + bx$ verwendet.
Übung: Anhand vielfältiger Übungsaufgaben werden die Umwandlungsmöglichkeiten geübt. Hier wird auch der Befehl „expand“ eingeführt, um die allgemeine Form ermitteln zu können.	SM 2.3.3 Aufg. 9 – 12	Aufgaben auswählen
Hausaufgabe:	SM 2.3.4 Aufg. 12	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Anhand der Bahnkurve eines Wasserstrahls werden Nullstellen und der Hochpunkt der Parabel erneut thematisiert. In diesem Zusammenhang wird auch der Befehl „factor“ verwendet. 	SM 2.3.4 Aufg. 13	
Vertiefung: Der Auftrag, die Nullstellen der Parabel mit der Gleichung $f(x) = 4\,x^2 - 12\,x + 14$ zu bestimmen, führt zu der Feststellung, dass diese Parabel keine Nullstellen hat. Ein Scheitelpunkt existiert. Es werden also Strategien erarbeitet, wie die Koordinaten des Scheitelpunktes zu ermitteln sind. Es kann auf die Symmetrie der Parabeln unter Verwendung der Tabelle Bezug genommen werden oder es können grafische Lösungswege beschritten werden.	PA UG	Zur Ermittlung des Scheitelpunktes können auch die Rechnerbefehle „fMin“ bzw. „fMax“ verwendet werden.
Übung: Die gegenseitige Umwandlung der verschiedenen Darstellungsformen wird vielfältig geübt. Hier wird der Befehl „expand“ verwendet, um die allgemeine Form ermitteln zu können.	SM 2.3.4 Aufg. 14 – 17	Weitere Aufgaben können nach eigener Wahl ergänzt werden.
Hausaufgabe:	SM 2.3.4 Aufg. 14 – 17	

Ablauf der Stunden 4 und 5:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Optimierung eines einem Rechteck einbeschriebenen Parallelogramms bildet den Auftakt zu einer Reihe von Optimierungsaufgaben. 	SM 2.3.5 Aufg. 18	
Übung: Anhand vielfältiger Anwendungsaufgaben werden die bisher erarbeiteten Lösungsstrategien geübt und gefestigt. Dabei ist immer die Frage im Zentrum: Welche Lösungsstrategie ist für das jeweils vorliegende Problem adäquat?	SM 2.3.5 und SM 2.3.6 Aufg. 18 - 24	Problemlösestrategien verdeutlichen Aufg. 22 aus SM 2.3.6 führt auf keinen quadratischen Zusammenhang. Das ist Absicht. Die erarbeiteten Problemlösestrategien unter Verwendung des Rechners greifen auch hier.
Hausaufgabe:		

Thema 3.: Modellbildung und Regression	**Dauer:** 4 Stunden
Bei manchen Zusammenhängen ist der Wirkzusammenhang klar. Damit ist ein Modell gewählt und plausibel. Für diesen Fall wird hier das quadratische Modell näher untersucht. Hierbei werden auf verschiedene Weise ermittelte Funktionsgleichungen vergleichend gegenübergestellt. Verglichen werden Gleichungen von Parabeln durch drei geschickt gewählte Punkte und Regressionsfunktionen. Daneben gibt es Datenzusammenhänge, bei denen der Wirkzusammenhang nur vermutet werden kann. Gerade in diesen Fällen ist die Modellwahl plausibel zu begründen.	
Besondere Materialien/Technologie: Folie aus LM 3.1 bis LM 3.5 SM 3.1 bis 3.6	

Ablauf der Stunde 1:

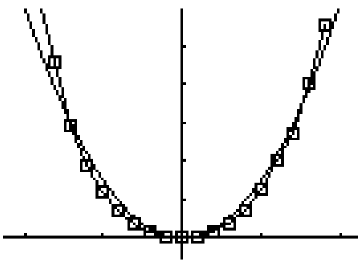
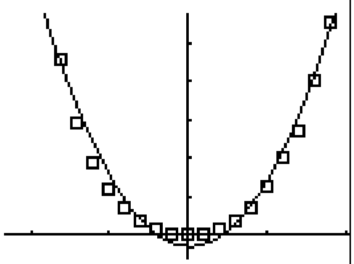
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Müngstener Brücke Die Müngstener Brücke über die Wupper ist eine der beeindruckendsten Eisenbahnbrücken. Zum 100-jährigen Jubiläum erschien sogar eine Briefmarke. Der untere Brückenbogen hat eine Spannweite von w = 160 m und eine Höhe h = 69 m. Untersuche, ob sich der untere Brückenbogen durch eine Parabel beschreiben lässt.	Folie aus LM 3.1 SM 3.1; Aufg. 1	Zur Lösung der Aufgabe ist das Modell „Parabel“ vorgegeben. Aus drei Punkten soll die Funktionsgleichung ermittelt werden.
Erarbeitung: Die Wahl eines Koordinatensystems ist frei. Durch die Wahl eines geeigneten Koordinatensystems ergeben sich verschiedene Funktionsgleichungen.	PA	Partnerarbeit
Vorstellen der Ergebnisse: Verschiedene Korrdinatensysteme und die zugehörigen Funktionsgleichungen sollten diskutiert werden. Als Einbettungen des Brückenbogens in ein Koordinatensystem sind z. B. möglich: • Scheitelpunkt im Ursprung • Scheitelpunkt in (0 | 69) • Nullstellen 0 und 160	UG Tafel	Sollte das Regressionsmodul bekannt sein, ist auch die Angabe von Näherungsparabeln durch Schüler möglich.
Weitere Auswertung: Die Angemessenheit der Modellannahme Parabel kann überprüft werden, indem ein Vergleich von gemessenen Werten mit den Funktionswerten f(x) zu einer der erarbeiteten Parabeln durchgeführt wird. Eine Diskussion der Abweichungen sollte berücksichtigen, dass eine angenommene Messungenauigkeit von 1 mm maßstabsbedingt zu einer Abweichung von 1 m führt!	UG	Bei der Untersuchung der Frage, ob das Modell „Parabel“ angemessen war, ist der Maßstab zu berücksichtigen. Bedingt durch Verzerrungen des

		Kopierers in horizontaler und vertikaler Richtung müssen u. U. zwei voneinander abweichende Maßstabsfaktoren eingeführt werden.
Hausaufgabe: Bestimme die Gleichung der Parabel.	SM 3.2 Aufg. 2	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe: Vorstellung der Ergebnisse der Hausaufgabe	SM 3.2 Aufg. 2	wiederholende Vertiefung durch Schülervortrag
Vertiefung und Erweiterung: Durch drei Punkte kann immer eine Parabel gelegt werden. Im Vergleich dazu liefert eine quadratische Regression ein anderes Ergebnis. Die Regression ist also ein grundsätzlich anderes Verfahren als es bisher verwendet wurde. Hier sollen diese beiden Möglichkeiten, eine Funktionsgleichung zu ermitteln, gegeneinander gestellt und verglichen werden. Dabei soll deutlich werden, dass die ermittelten Gleichungen verschieden sein müssen.	SM 3.2 Aufg. 3 PA Tafel UG Tafel	Die Ermittlung der Funktionsgleichung mithilfe von drei geschickt gewählten Punkten kann von den Schülern durchgeführt werden. Zur Ermittlung der Regressionsgleichung ist die Verwendung der entsprechenden Anleitung in „TC-Hilfe“ sinnvoll.
Reflexion: Bei der Reflexion der Regression soll die Frage der Modellbildung thematisiert werden. In manchen Fällen ist der sogenannte Wirkzusammenhang klar, die funktionale Abhängigkeit also wegen theoretischer Überlegungen gesichert. Dann ist die Wahl einer quadratischen Regression angemessen. Manchmal ist dieser Wirkzusammenhang nicht gegeben. Dann ist die Auswahl eines Regressionsmodells plausibel zu begründen.	UG Folie aus LM 3.2 Info in SM 3.2	Das Schülermaterial fasst die Reflexion zusammen und dient somit der Sicherung der besprochenen Fragen. Wissensspeicher
Hausaufgabe: Hammerwurf	SM 3.3 Aufg. 4	Die Hausaufgabe dient der Sicherung der Zusammenhänge.

Ablauf der Stunde 3:

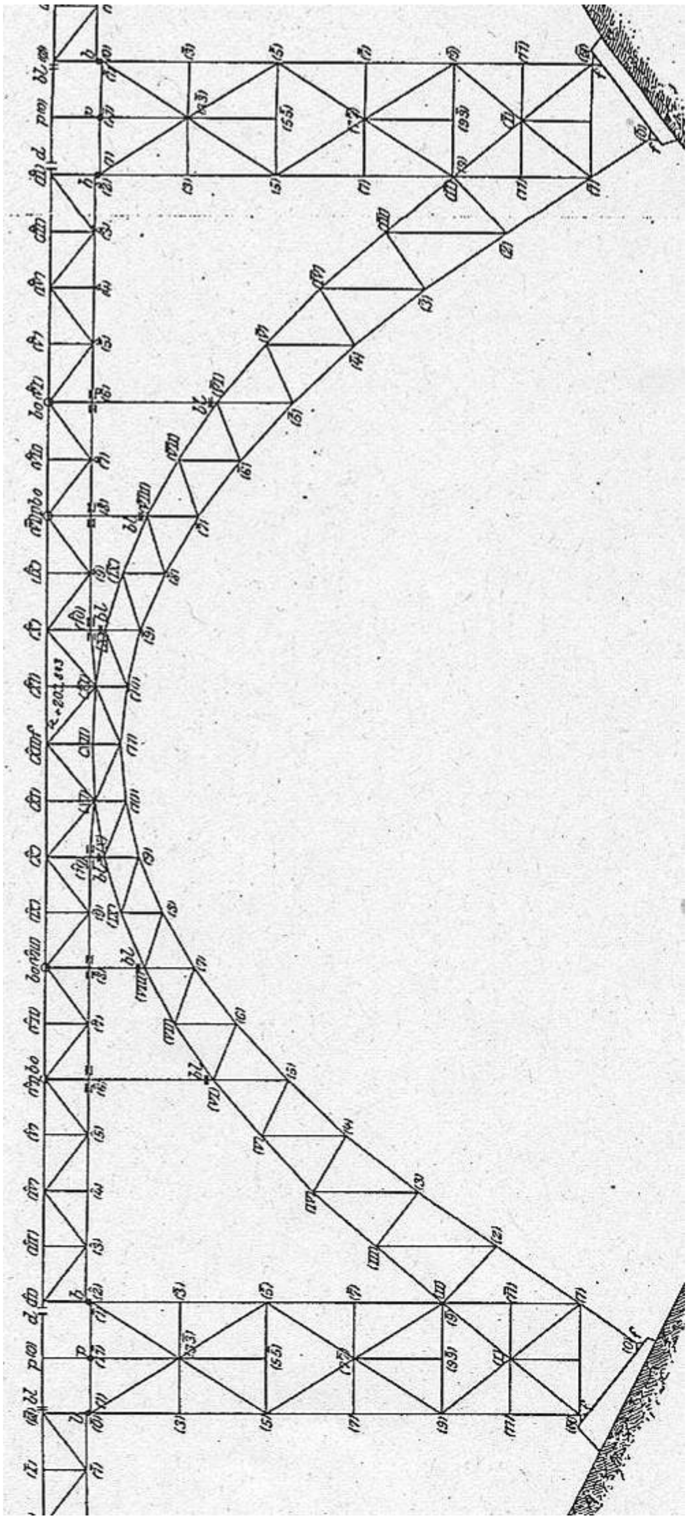
Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der Hausaufgabe: Vorstellung der Ergebnisse der Hausaufgabe	SV	wiederholende Vertiefung
Erarbeitung: Kettenlinie Untersuche, ob sich der Verlauf der Kette durch eine Parabel beschreiben lässt. Zur Untersuchung dieser Frage wird eine Kette vermessen und die Daten werden hinsichtlich eines quadratischen Zusammenhangs untersucht.	Folie aus LM 3.3 SM 3.3 Aufg. 5	Zur Datenaufnahme kann entweder eine Kette an der Tafel vermessen werden oder es werden die Daten aus dem Schülermaterial verwendet.
Vertiefung:  Anpassung „von Hand“  Regression Der Vergleich der Graphen ergibt: • Die Kettenlinie ist keine Parabel. Die Kettenlinie verläuft zwischen Scheitelpunkt und Schnittpunkt mit der Parabel unterhalb, jenseits des Schnittpunkts oberhalb der Parabel. Die Parabel lässt sich daher durch keinen Streckfaktor besser anpassen. • Die quadratische Regression ergibt die Gleichung einer quadratischen Funktion, bei der die Abweichungen zwischen Kettenlinie und Funktionswerten nach einem bestimmten Verfahren möglichst klein sind.	„TC-Hilfen“	Es sollte deutlich werden, dass nicht jeder “krumme” Graph auch der Graph einer quadratischen Funktion ist. Wissensspeicher
Übungen: Anhand verschiedener Aufgaben wird die Regression vertieft.	SM 3.3 – 3.5: Aufg. 6 – 11	
Hausaufgabe: Restliche Aufgaben des Schülermaterials.	SM 3.4 – 3.5: Aufg. 7 – 11	Bei den Aufgaben ist eine Auswahl zu treffen.

Ablauf der Stunde 4:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe: Vorstellung der Ergebnisse der Hausaufgabe	 SV	 wiederholende Vertiefung
Einstieg zur Modellbildung: Fontäne: Das Bild von Fontänen soll als “Desktop-Bild” für den TC erstellt werden. Dazu müssen die Parameter in der quadratischen Funktion eigenständig angepasst werden. Die Schüler können ihre Lösung überprüfen, indem die Fontänen als Folie auf dem Display aufgelegt und verglichen werden.	 Folie aus LM 3.5 SM 3.5 Aufg. 12	 Partnerarbeit
Übungen: Anhand verschiedener Aufgaben wird die Modellbildung vertieft.	SM 3.6 Aufg. 13 – 14	

Folienvorlage LM 3.1

Müngstener Brücke

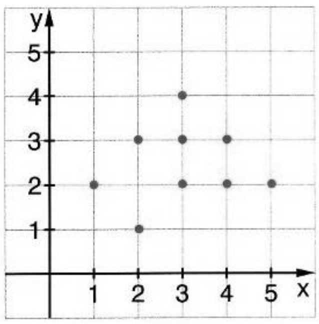


Untersuche, ob sich der untere Brückenbogen durch eine Parabel beschreiben lässt.

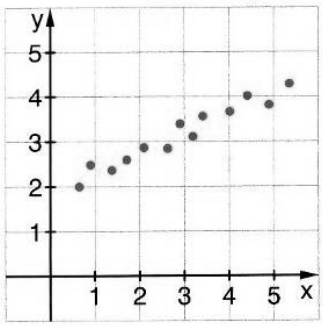
Folienvorlage LM 3.2

Punktwolken

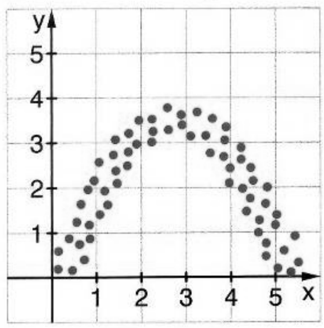
kein erkennbarer Zusammenhang



linearer Zusammenhang

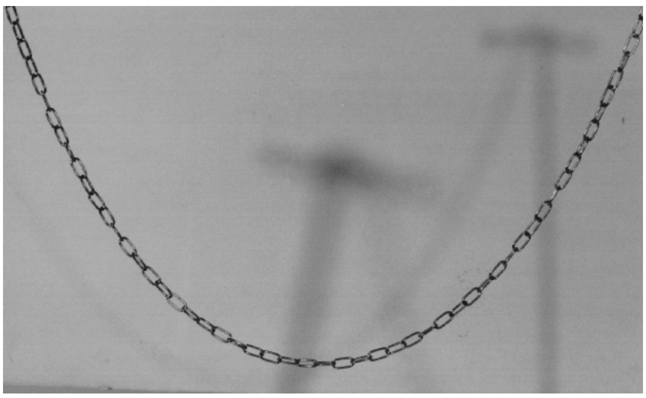


quadratischer Zusammenhang



Folienvorlage LM 3.3

Kettenlinie



Beispielwerte

x	- 9	- 8	- 7	- 6	- 5	- 4	- 3	- 2	- 1	0
y	61,5	45,5	29	19	12,1	7,2	4	1,6	0,4	0

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
y	0	0,6	1,7	3,9	7,1	12,5	19,9	27	40,3	55,5

Folienvorlage LM 3.5
(Das Bild ist noch so zu vergrößern, dass es auf das Overhead-Display des Rechners passt.)

Fontänen

Thema 4.: Zusammenstellung von Lösungsstrategien	**Dauer:** 3 Stunden
Die Langzeitaufgabe (siehe Thema 1.) mit händisch zu bearbeitenden Aufgaben wird zunächst ausgewertet. Im Anschluss daran sollen die Schüler Methoden der Umwandlung von einer Darstellungsform in die andere systematisch erfassen und Strategien zum Lösen von Standardproblemen je nach vorgegebener Darstellungsform zusammenstellen.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 4.1, SM 6.1 – 6.5	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Die Lösung der Langzeitaufgaben wird in dieser Stunde präsentiert und ausführlich besprochen. Dabei wählt der Lehrer nach der Durchsicht der vorher abgegebenen Schülerlösungen einzelne Schüler aus, die ihre Ergebnisse präsentieren. Sinnvoll erscheint es dabei, die Lösungen auf Folien zu kopieren.	SM 6.1– 6.5 Folien	Präsentation, UG

Ablauf der Stunde 2:

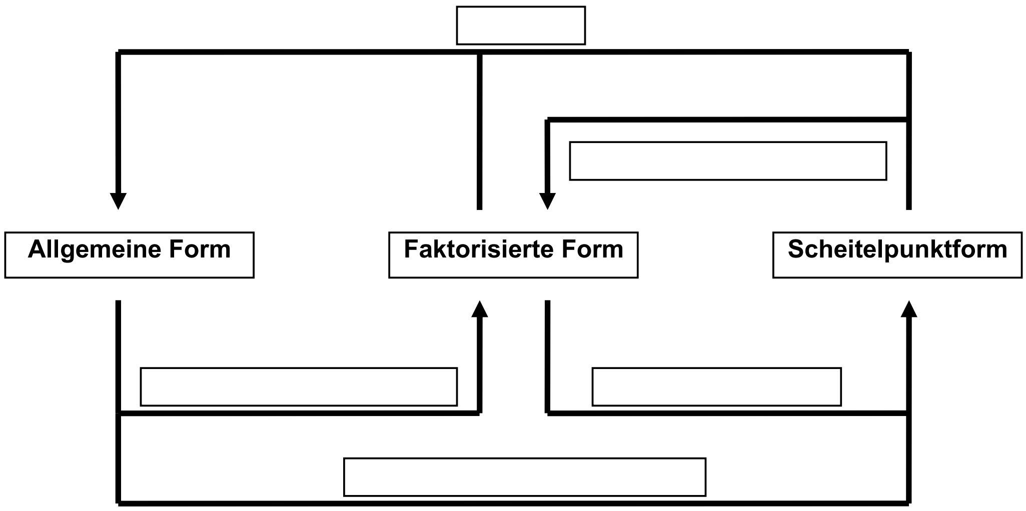
Inhalt	Medien	Kommentar
Erarbeitung (15 Minuten) Die Schüler sollen das Schaubild vervollständigen.	SM 4.1	PA
Auswertung (15 Minuten) Das Schaubild wird am OHP vervollständigt.	LM 4.1	UG
Übung/Festigung An leichten Beispielen, die die Schüler vorgeben, sollen Umwandlungen geübt werden.	Tafel	EA/UG
HA: Die Tabelle mit den Strategien zum Lösen von Standard-problemen soll vervollständigt werden.	Folien LM 4.2	

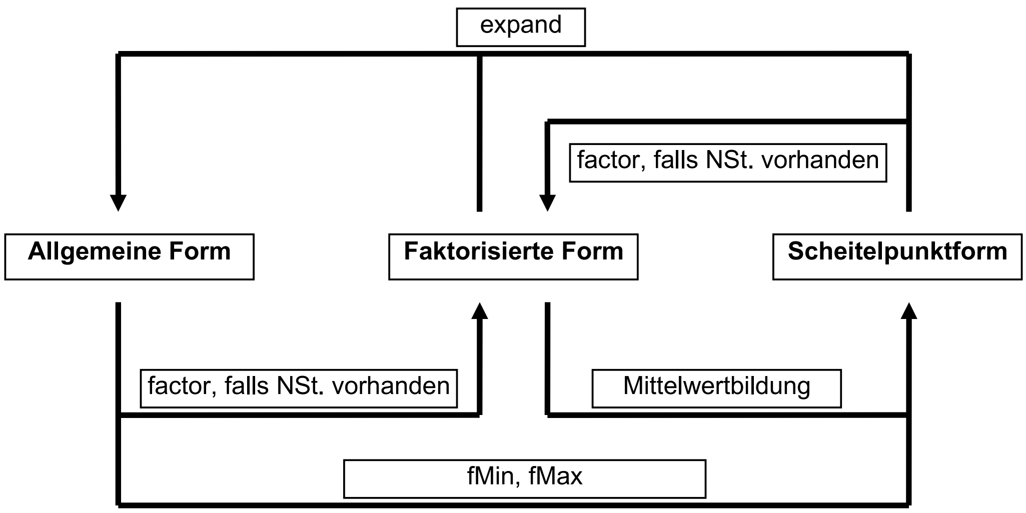
Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechen der Hausaufgabe (20 Minuten) Die Strategien zum Lösen der Standardprobleme werden zusammengestellt.	SM 4.1	Schülerpräsentation/UG
Erarbeitung Ausgehend von konkreten Beispielen aus der Langzeitaufgabe werden die Lösungswege zum Lösen quadratischer Gleichungen der Form $ax^2+bx=0$ und $ax^2+c=0$ allgemein notiert: $ax^2+bx=0$ $(ax+b)\cdot x=0$ $x=0 \;\vee\; ax+b=0$ $x=0 \;\vee\; x=-\frac{b}{a}$ $ax^2+c=0$ $ax^2=-c$ $x^2=-\frac{c}{a}$ $x=-\sqrt{\frac{-c}{a}} \;\vee\; x=\sqrt{\frac{-c}{a}}$	Tafel	UG
Weitere Übungen An die Erarbeitung kann sich eine weitere Übungsphase anschließen, um die Kalküle zu festigen. Das Material dient dazu, gezielt Aufgaben auszuwählen.	SM 6.2 Aufg. 1 – 5 SM 6.3 Aufg. 1 – 7	Ggf. können weitere Aufgaben der Literatur entnommen werden.
HA: Je eine Gleichung der beiden Formen soll gelöst werden.		

Folienvorlage LM 4.1

Rechnerisches Umwandeln in die verschiedenen Darstellungsformen





Folienvorlage LM 4.2

Strategien zum Lösen von Standardproblemen

Was willst du?	**Situation**	**Was tust du?**
Nullstellen bestimmen	Funktion in faktorisierter Form gegeben	
	Funktion in allgemeiner oder Scheitelpunktform gegeben	
Scheitelpunkt (d;e) bestimmen	Funktion in Scheitelpunktform gegeben	
	Funktion in faktorisierter Form gegeben	
	Funktion in allgemeiner Form gegeben	
Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen	Funktion in allgemeiner Form gegeben	
	Funktion faktorisierter Form oder Scheitelpunktform gegeben	

Was willst du?	**Situation**	**Was tust du?**
Nullstellen bestimmen	Funktion in faktorisierter Form gegeben	m und n ablesen
	Funktion in allgemeiner oder Scheitelpunktform gegeben	„factor“ oder „solve“ → m und n ablesen
Scheitelpunkt (d;e) bestimmen	Funktion in Scheitelpunktform gegeben	d und e ablesen
	Funktion in faktorisierter Form gegeben	Mittelwert aus m und n ist d →Funktionswert an der Stelle d ist e
	Funktion in allgemeiner Form gegeben	*Entweder* in faktorisierte Form umwandeln, falls möglich *oder* mit „fMin“ bzw. „fMax“ d bestimmen → Funktionswert an der Stelle d ist e
Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen	Funktion in allgemeiner Form gegeben	c ablesen
	Funktion in faktorisierter Form oder Scheitelpunktform gegeben	„expand“ → c ablesen

Thema 5.: Geometrie der Parabel/Ortslinie	**Dauer:** 2 Stunden
Neben einer analytischen Betrachtung der Parabel als Graph einer quadratischen Funktion kann die Parabel auch als Ortslinie betrachtet werden. Hierbei gibt es verschiedene Zugänge. Bei den hier gewählten Beispielen wird die Untersuchung auf den Ort aller Punkte beschränkt, die zu einem (Brenn-)Punkt und zu einer Geraden gleichen Abstand haben.	
Besondere Materialien/Technologie: Folie aus LM 5.1 und LM 5.2 SM 5.1 bis 5.3 CABRI-Datei Ortslini.v2a	

Ablauf der Stunde 1:

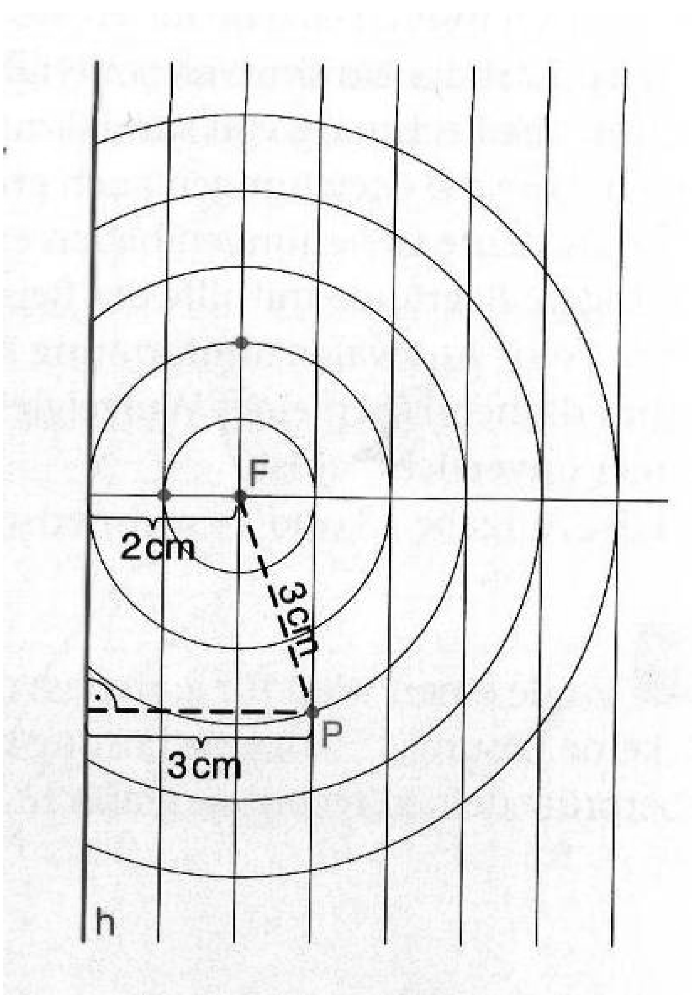
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe: Besprechung der Regressionsaufgabe		wiederholende Vertiefung
Einführung: Schülerparabel auf dem Schulhof Es ergibt sich als Vermutung: Punkte, die gleich weit von einer Geraden und einem Punkt liegen, beschreiben eine Parabel.	SM 5.1 Aufg. 1	Die Aufstellung der Schüler dient dazu, eine Parabel als Kurvenform zu vermuten.
Erarbeitung: Überprüfung der Vermutung anhand von $y = 0{,}25\ x^2$ und der Leitgeraden $y = -1$. Für verschiedene Parabelpunkte wird überprüft, ob diese jeweils den gleichen Abstand zu f und g aufweisen. In einer Erweiterung werden zu vorgegebener Parabel die Gleichung der Leitgeraden und der Brennpunkt bestimmt.	PA	
Sicherung: Die o.g. Vermutung scheint richtig. Zwischen der y-Koordinate des Brennpunktes und dem Faktor a in der Funktionsgleichung $y = a \cdot x^2$ besteht ein Zusammenhang.	UG Tafel	Wissensspeicher
Hausaufgabe: Parabel als Ortslinie aller Punkte, die von einem Punkt und einer Geraden gleichen Abstand hat.	SM 5.1 Aufg. 2	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe: Besprechung der Hausaufgabe	Folie aus LM 5.1	
Erarbeitung: Die Parabel als Ortslinie soll mithilfe der dynamischen Geometriesoftware konstruiert werden. Dazu wird in Cabri mithilfe der Mittelsenkrechten die Ortslinie konstruiert.	PA Folie aus LM 5.2 SM 5.2 Aufg. 3	Die Schüler sollen die Ortslinie mithilfe von CABRI eigenständig konstruieren. Hilfen dazu finden sich in „TC-Hilfen“ vorhergehender Unterrichtseinheiten.
Sicherung: Die Parabel ist die Ortslinie aller Punkte, die von einem Punkt und einer Geraden gleichen Abstand hat.	UG Tafel	Die CABRI-Datei Ortslini.v2a kann zur Demonstration eingesetzt werden.
Übungen: Konstruktion der Parabel für die Leitgerade $y = x + 1$ und den Brennpunkt $F (- 1 \mid 2)$. Bei dieser Aufgabe wird deutlich, dass eine Parabel auch schief im kartesichen Koordinatensystem liegen kann.	PA SM 5.2 Aufg. 4	Wissensspeicher
Zusatzübungen: Zur Verteifung der Kenntnisse können weitere Ortslinien konstruiert und untersucht werden.	PA SM 5.3 Aufg. 5 – 7	

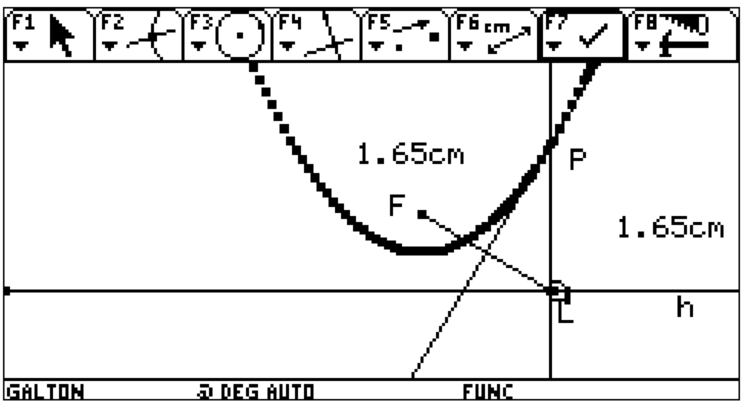
Folienvorlage LM 5.1

Konstruktion der Ortslinien



Folienvorlage LM 5.2

Konstruktion der Ortslinien mit CABRI



6. Wissensspeicher

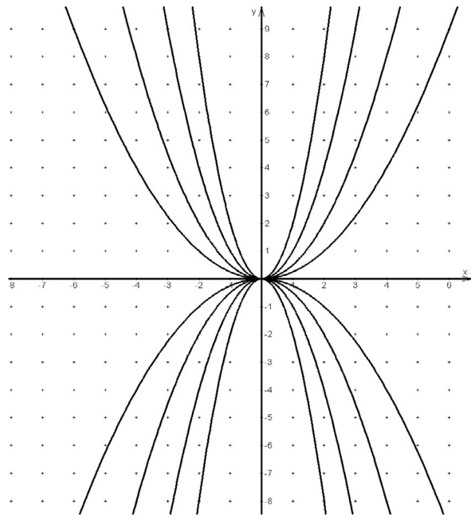
Funktionen mit Gleichungen der Art
$f(x)= a\cdot(x – m)\cdot(x – n)$, wobei $a \neq 0$ (**faktorisierte Form**)
oder
$g(x)= a\cdot x^2 + b\cdot x + c$, wobei $a \neq 0$ (**allgemeine Form**)
heißen **quadratische Funktionen.**

Der Graph einer quadratischen Funktion heißt **Parabel**. Die **Parabelform** ist typisch für Graphen quadratischer Funktionen.
Eine Parabel kann nach oben ($a > 0$) oder unten ($a < 0$) geöffnet sein.
Der höchste bzw. niedrigste Punkt der Parabel heißt **Scheitelpunkt**.
Die Parabel ist symmetrisch zu einer Parallelen zur y-Achse, die durch den Scheitelpunkt verläuft.
Die Schnittstellen der Parabel mit der x-Achse heißen **Nullstellen**.
Eine Parabel kann keine, eine oder zwei Nullstellen haben.

Die einfachste Funktionsgleichung einer quadratischen Funktion ist: $f(x) = x^2$. Der zugehörige Funktionsgraph heißt **Normalparabel.**

a) Sie ist symmetrisch zur y-Achse.
b) Beim Zeichnen erhält man die Gitterpunkte, durch die die Parabel verläuft:
   Vom Scheitelpunkt einen nach rechts, einen nach oben.
   Von dort einen nach rechts, drei nach oben.
   Von dort einen nach rechts, fünf nach oben.
   (…)

$f(x) = a \cdot x^2$:
$a > 0$: Graph ist nach oben geöffnet
$a < 0$: Graph ist nach unten geöffnet
durch den Parameter a wird die Normalparabel in y-Richtung gestreckt, wenn $|a| > 1$ und gestaucht, wenn $|a| < 1$
a heißt **Streckfaktor**.



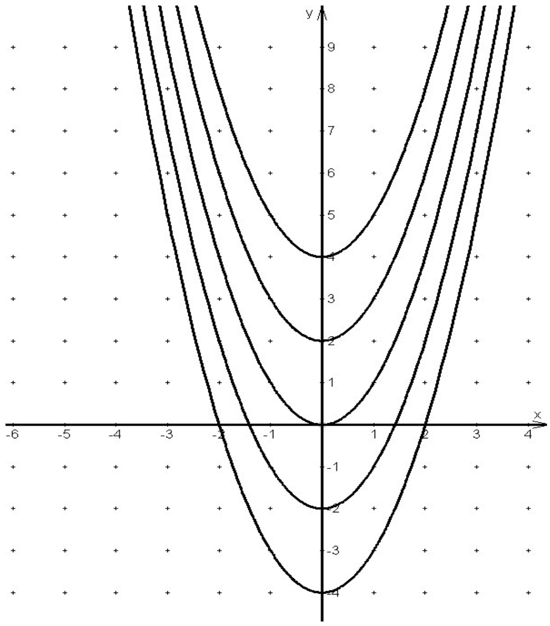
Informationen, die aus der allgemeinen Form $a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ abgelesen werden können:
Schnittpunkt mit der y-Achse: $(0 \mid c)$
Streckfaktor a

Informationen, die aus der faktorisierten Form $a\cdot(x – m)\cdot(x – n)$ abgelesen werden können:
Schnittpunkte mit der x-Achse $(m \mid 0)$ und $(n \mid 0)$
Streckfaktor a

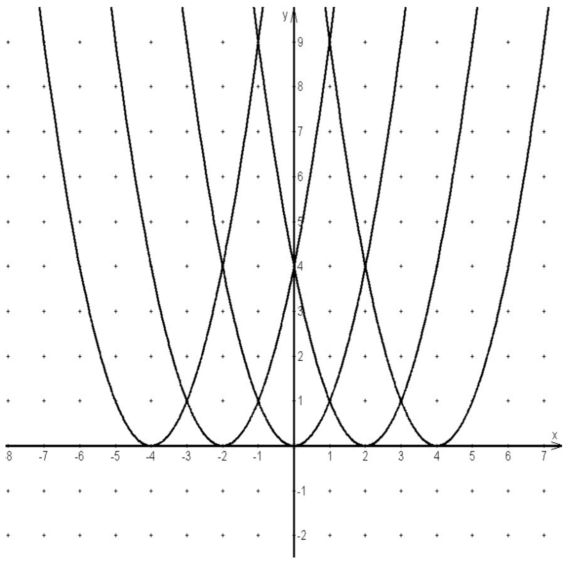
Scheitelpunktform:
Quadratische Funktionen können auch in der Scheitelpunktform gegeben sein.
$$f(x) = a \cdot (x – d)^2 + e$$

Informationen, die aus der Scheitelpunktform f(x) = a · (x – d)² + e abgelesen werden können:

- $f(x)= x^2 + e$:
  Der Graph wird um |e| verschoben und zwar
  nach oben für $e > 0$
  nach unten für $e < 0$.

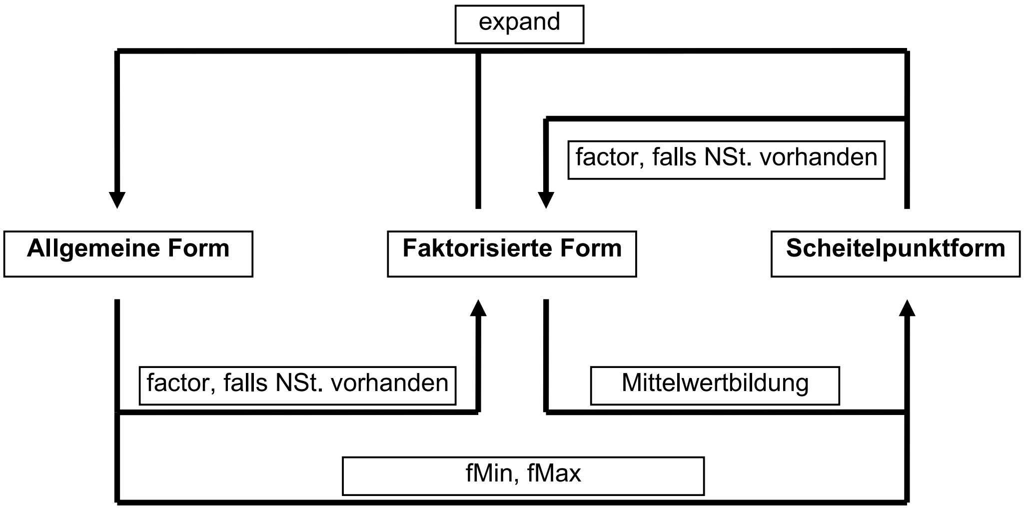


- $f(x) = (x - d)^2$:
  Der Graph wird um |d| verschoben und zwar
  nach rechts für $d > 0$
  nach links für $d < 0$.



- $f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$:
  Der Graph der Normalparabel wird
  um d Einheiten in x-Richtung verschoben,
  um den Faktor a in y-Richtung gestreckt und
  um e Einheiten in y-Richtung verschoben.
  Der Scheitelpunkt des Graphen ist S(d | e).

Rechnerisches Umwandeln in die verschiedenen Darstellungsformen



Strategien zum Lösen von Standardproblemen

Was willst du?	Situation	Was tust du?
Nullstellen bestimmen	Funktion in faktorisierter Form gegeben	m und n ablesen
	Funktion in allgemeiner oder Scheitelpunktform gegeben	„factor" oder „solve" → m und n ablesen
Scheitelpunkt (d | e) bestimmen	Funktion in Scheitelpunktform gegeben	d und e ablesen
	Funktion in faktorisierter Form gegeben	Mittelwert aus m und n ist d → Funktionswert an der Stelle d ist e
	Funktion in allgemeiner Form gegeben	*Entweder* in faktorisierte Form umwandeln, falls möglich *oder* mit „fMin" bzw. „fMax" d bestimmen → Funktionswert an der Stelle d ist e
Schnittpunkt mit der y-Achse bestimmen	Funktion in allgemeiner Form gegeben	c ablesen
	Funktion in faktorisierter Form oder Scheitelpunktform gegeben	„expand" → c ablesen

Rechnerisches Lösen quadratischer Gleichungen

Quadratische Gleichungen lassen sich algebraisch, tabellarisch oder grafisch lösen.
Ist die quadratische Gleichung in der Form $a \cdot x^2 + b \cdot x + c = 0$ gegeben, wobei a, b und c ungleich Null sind, so kann die Gleichung nur mithilfe des „solve"-Befehls gelöst werden.

Folgende Gleichungen sollen auch händisch gelöst werden können:

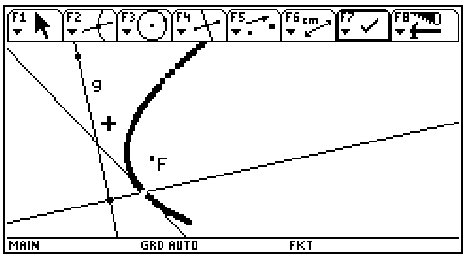
Quadratische Gleichungen, die außer Zahlen nur x^2 enthalten, lassen sich umformen zu
$x^2 = a$ oder $x^2 - a = 0$ (reinquadratische Gleichung).
Rechnerische Lösung durch Wurzelziehen.
$x^2 = a$
$a > 0$: Zwei Lösungen $x = \sqrt{a}$ oder $x = -\sqrt{a}$
$a = 0$: Eine Lösung $x = 0$
$a < 0$: Keine Lösung

Quadratische Gleichungen ohne lineares oder konstantes Glied sollen ebenfalls ohne TC-Hilfe gelöst werden können.

ohne konstantes Glied	**ohne lineares Glied**
$a \cdot x^2 + b \cdot x = 0$ $(a \cdot x + b) \cdot x = 0$ $x = 0 \ \vee \ a \cdot x + b = 0$ $x = 0 \ \vee \ x = -\frac{b}{a}$	$a \cdot x^2 + c = 0$ $a \cdot x^2 = -c$ $x^2 = -\frac{c}{a}$ $x = -\sqrt{\frac{-c}{a}} \ \vee \ x = \sqrt{\frac{-c}{a}}$

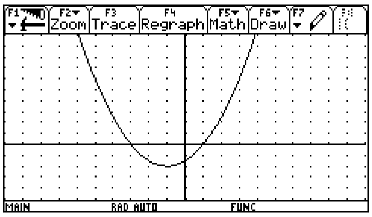
Parabel als Ortslinie

Eine Parabel ist die **Ortslinie** aller Punkte, die von einer Geraden g und einem Punkt F den gleichen Abstand haben. Den Punkt F nennt man den **Brennpunkt** der Parabel.



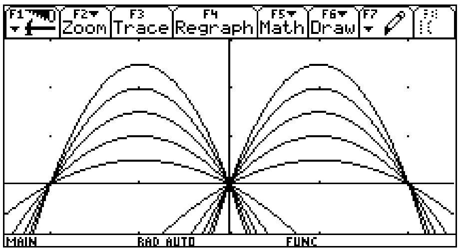
7. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

<table>
<tr><th>Ich kann</th><th>ich bin sicher</th><th>ich muss noch üben</th><th>ich brauche Hilfe</th></tr>
<tr><td>• zu einfachen quadratischen Funktionen ohne TC Wertetabellen erstellen und die Wertepaare in ein geeignetes Koordinatensystem eintragen.
$f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• Graphen quadratischer Funktionen ihren Funktionsgleichungen zuordnen und umgekehrt.
a) $f(x) = \frac{1}{2}(x-1)(x+3)$
b) $g(x) = \frac{1}{2}(x+1)(x-3)$

</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• den Funktionsterm einer quadratischen Funktion von der allgemeinen Form in die faktorisierte Form überführen und umgekehrt.
$3x^2 + 17{,}5x - 45$
$(x-3)(x+8)$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• von der allgemeinen Form des Funktionsterms über die faktorisierte Form die Scheitelpunktform ermitteln und umgekehrt.
$x^2 - 2x + 5$
$-(x+2)^2 - 5$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• von der allgemeinen Form des Funktionsterms mithilfe der TC-Befehle „fMin" und „fMax" deren Scheitelpunktform ermitteln.
$x^2 + 5x + 15$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• zu einem vorgegebenen Funktionsterm einer quadratischen Funktion den Scheitelpunkt und – falls vorhanden – die Nullstellen angeben und umgekehrt.
<table>
<tr><th rowspan="2">Funktionsterm</th><th rowspan="2">Nullstellen</th><th colspan="2">Scheitelpunkt</th></tr>
<tr><th>x</th><th>y</th></tr>
<tr><td>(x – 3) · (x + 5)</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>(x – 1)² + 4</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td>- 2 ; 2</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td></td><td></td><td>- 4</td><td>3</td></tr>
</table></td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• folgende Typen quadratischer Gleichungen ohne TC rechnerisch lösen.
$x^2 - 36 = 0$
$2x^2 + 8x = 0$
• folgende Arten quadratischer Gleichungen ohne TC grafisch lösen.
$x^2 + 5x + 6 = 0$
$x^2 = 2x + 8$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th>Ich kann</th><th>ich bin sicher</th><th>ich muss noch üben</th><th>ich brauche Hilfe</th></tr>
<tr><td>• eine Parabel als Ortslinie konstruieren.
Bestimme die Gleichung der Parabel mit der Leitgeraden f(x) = - 2 und dem Brennpunkt F(0; 2).</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• eine quadratische Regression mit dem TC-Befehl „QuadReg" durchführen und bewerten.

Zum Beispiel:
Mithilfe von besonderen Messgeräten wurden die folgenden Daten für den Flug eines Hammers beim Hammerwerfen aufgezeichnet.
<table>
<tr><td>x [m]</td><td>0</td><td>10</td><td>20</td><td>30</td><td>40</td><td>50</td><td>60</td><td>70</td></tr>
<tr><td>h(x) [m]</td><td>0</td><td>5,1</td><td>9,3</td><td>10,5</td><td>11</td><td>8,7</td><td>5,4</td><td>0</td></tr>
</table>
Übertrage die Werte aus der Tabelle in deinen TC und berechne ein quadratisches Modell.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• zu vorgegebenen parabelförmigen Objekten eine passende quadratische Funktion finden.

Zum Beispiel:
Zeichne folgendes Bild auf deinem Rechner:


$x_{min} = -2{,}5$ $y_{min} = -1$
$x_{max} = 2{,}5$ $y_{max} = 3$</td><td></td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>• mithilfe einer quadratischen Funktion einen Vorgang modellieren.

Zum Beispiel:
Aus einer quadratischen Pappe soll eine Schachtel (ohne Deckel) hergestellt werden, indem man an jeder Ecke ein Quadrat der Seitenlänge 4 cm abschneidet und die Ränder des verbleibenden Pappstücks hochfaltet. Das Volumen der Schachtel soll 156 cm³ betragen. Bestimme die Größe der ursprünglichen Pappe.</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

8. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1

Gib zu den Parabeln mit den folgenden Termen die Koordinaten des Scheitelpunkts und die Nullstellen an, sofern sie existieren:

Funktionsterm	Nullstellen	Scheitelpunkt	
		x	y
$(x - 3) \cdot (x + 5)$			
$(x - 1)^2 + 4$			
$2 \cdot (x - 3) \cdot (2 \cdot x + 4)$			
$x^2 - 9$			
$3 \cdot x + 6$			

Aufgabe 2

Gib den Term einer Parabel mit den folgenden Eigenschaften an:

Nullstellen	Scheitelpunkt		Funktionsterm
	x	y	
2; - 2			
	1	5	
	- 4	3	
- 3			

Aufgabe 3

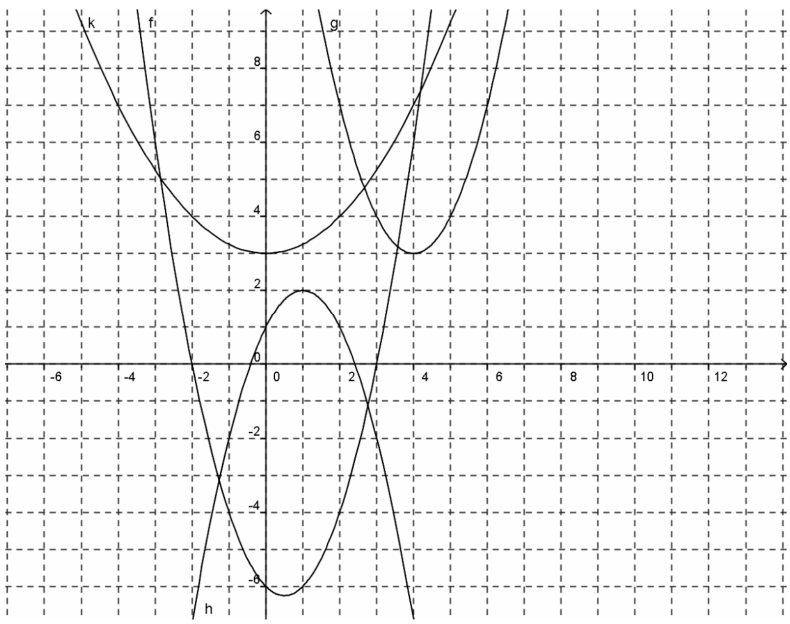
Gib den Term einer Parabel zu folgenden Graphen an:

f(x)=

g(x)=

h(x)=

k(x)=



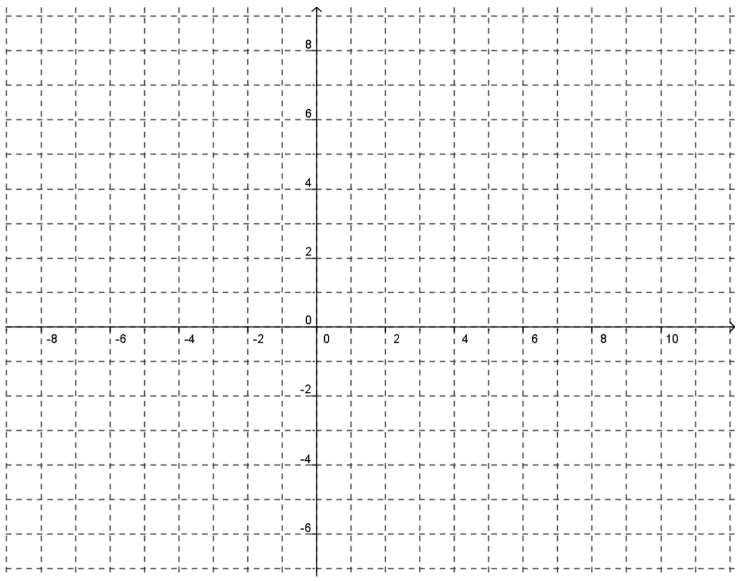
Aufgabe 4

Skizziere die Graphen zu folgenden Gleichungen in das gegebene Koordinatensystem:

$f(x) = -(x-1)^2 + 3$

$g(x) = \frac{1}{3} \cdot (x-2) \cdot (x+4)$

$h(x) = 2 \cdot (x+2)^2 - 4$



Aufgabe 5

Fülle die Lücken in der Tabelle aus:

x	$f(x) = x^2 + 2 \cdot x$
- 3	
0	
2	

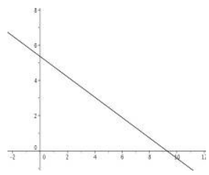
x	$f(x) = (x-1) \cdot (x+3)$
- 1	
0	
1	

x	$f(x) = -3 \cdot x^2 - 5$
- 2	
1	
2	

Aufgabe 6

Kreuze an, welche Eigenschaft zu welchem Funktionstyp passt.

x	y
2	5
3	7,5
4	10

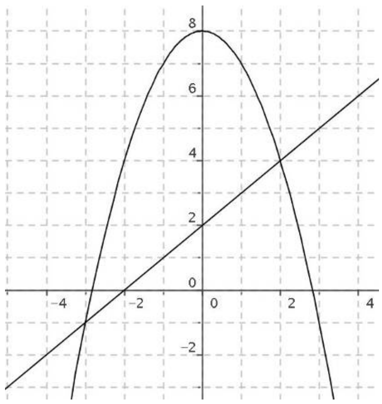


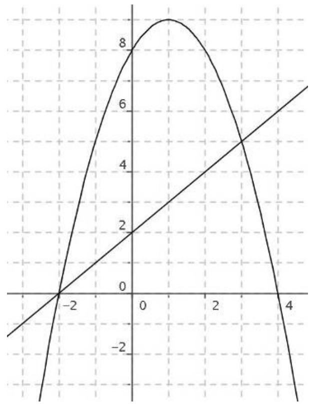
$y = -x^2 + 3{,}2$

x	y
1	2
2	4
3	9

proportional	❑	❑	❑	❑
linear	❑	❑	❑	❑
quadratisch	❑	❑	❑	❑
keine von den dreien	❑	❑	❑	❑

Aufgabe 7





Welche Gleichung wird hier dargestellt? Mehrere Kreuze möglich:

$x^2 + 8 = x + 2$	❑	❑
$(x - 1)^2 + 8 = x + 2$	❑	❑
$x + 2 = (x + 2)\cdot(x - 4)$	❑	❑

Lies jeweils die Lösungen ab:

Aufgabe 8

Gegeben sind drei Gleichungen. Kreuze jeweils an:

	$x^2 = 5$	$2\cdot x = 3$	$-3 = x^2$	$x^2 - 5 = x$
hat keine Lösung	❑	❑	❑	❑
hat genau eine Lösung	❑	❑	❑	❑
hat genau zwei Lösungen	❑	❑	❑	❑

Aufgabe 9

Löse die Gleichungen

a) $x^2 - 20 = 5$

b) $x^2 + 4\cdot x = 0$

c) $3\cdot x + 2 = 2 - x^2$

Aufgabe 10

Der Bremsweg eines Modellautos ist umso länger, je schneller es fährt. Frieder hat Messungen durchgeführt:

x: Geschwindigkeit in m/s	0	1	2	3
y: Bremsweg in m	0	0,51	2,01	4,5

a) Begründe kurz, dass diese „je schneller, desto länger"- Zuordnung nicht proportional ist.

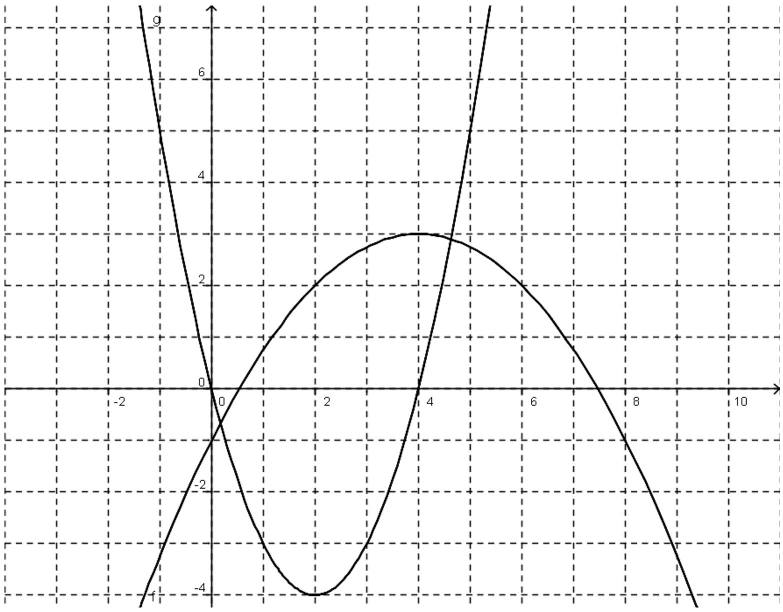
b) Ist eine quadratische Funktion zur Modellierung geeignet? Überprüfe.

.

9. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1

Gib zu den dargestellten Graphen die Funktionsgleichungen an.

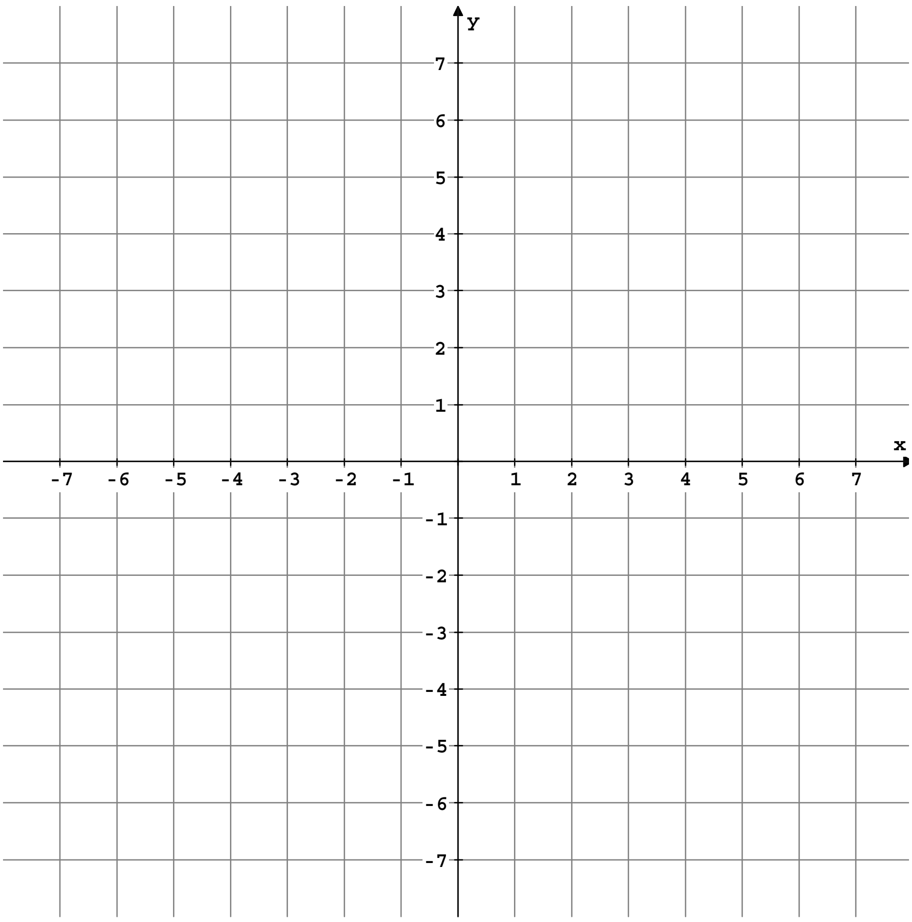


Aufgabe 2

Skizziere in das nebenstehende Koordinatensystem die Graphen der gegebenen Funktionen.

$f(x) = 0{,}5 \cdot (x + 3)^2$

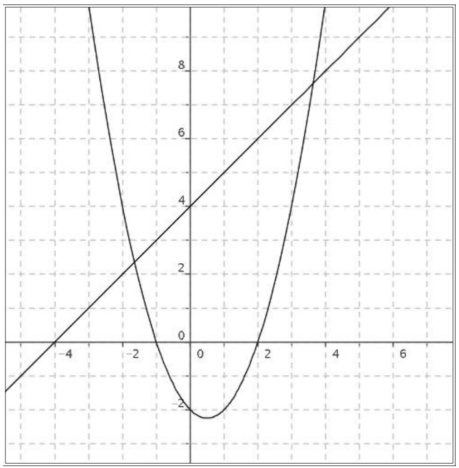
$g(x) = -x^2 + 5$



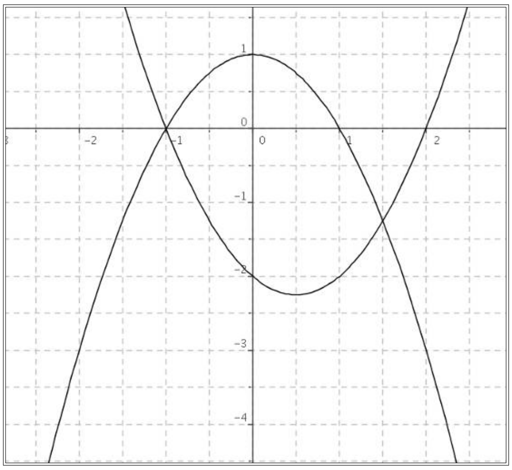
Aufgabe 3

a) Ordne jeder Grafik die zugehörige Gleichung zu.

A: $(x + 1)(x - 2) = -x^2 + 1$ B: $(x + 1)(x - 2) = x + 4$ C: $x + 4 = -x^2 + 1$



Grafik 1



Grafik 2

Zur Grafik 1 gehört Gleichung: Zur Grafik 2 gehört Gleichung:

b) Betrachte Grafik 1. Verändere den Term für die Gerade so, dass die zugehörige Gleichung keine Lösung mehr aufweist.

Aufgabe 4

a) Gib zu $f(x) = x^2 + 4x + 3$ die faktorisierte Funktionsgleichung und die Scheitelpunktform an.

b) Beschreibe, wie du die Aufgabe a) mit dem TC gelöst hast und wie man das Problem ohne TC lösen kann.

c) Gegeben sind die Nullstellen $x_1 = 2$ und $x_2 = 5$. Gib eine Funktionsgleichung und den Scheitelpunkt an. Worin unterscheiden sich mögliche Lösungen?

Aufgabe 5

Gib an, welche Form der Funktionsgleichung quadratischer Funktionen du für das jeweilige Problem am geeignetsten hältst. Erfinde ein Beispiel zur Erklärung.

a) Bestimmung der Nullstellen.

b) Ablesen des y-Achsenabschnittes.

c) Bestimmung der Symmetrieachse.

Aufgabe 6

Löse die Gleichungen ohne den Rechner. Gib hierzu mindestens einen Zwischenschritt an:

a) $x^2 - 3 \cdot x = 0$

b) $2 \cdot x^2 + 18 = 0$

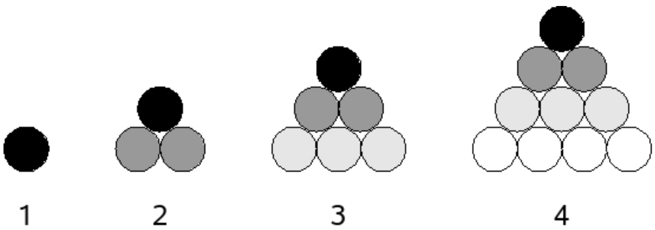
c) $4 \cdot x + 2 = x$

d) $5 \cdot x - x^2 = x$

Aufgabe 7

a) Es seien $P_1(1 \mid 1)$, $P_2(2 \mid 3)$, $P_3(3 \mid 6)$ und $P_4(4 \mid 10)$ vier Punkte mit ihren Koordinaten. Die Punktkoordinaten beschreiben die Figuren rechts. Welche Bedeutung haben x- und y-Koordinate im Hinblick auf die Abbildung? Wie lauten demgemäß die Koordinaten des Punktes P_5?

b) Zeige, dass diese Punkte auf einer Parabel liegen. Gib auch die Gleichung dieser Parabel an.

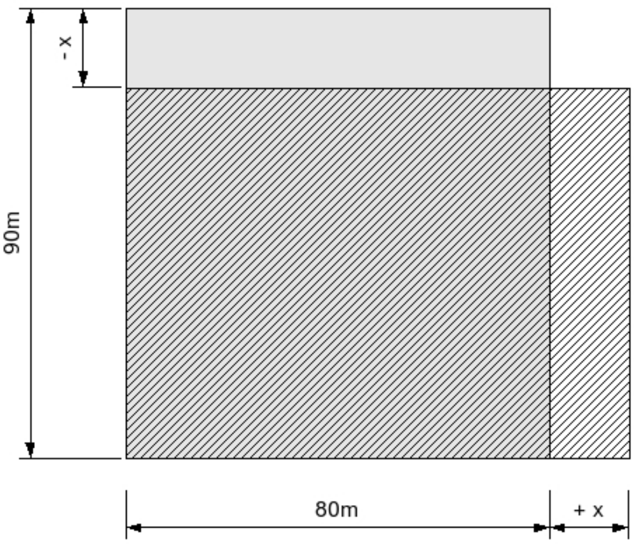


Aufgabe 8

Im Zuge einer Flurbereinigung soll ein Grundstück mit den Maßen 80 m x 90 m verändert werden. Man bietet dem Eigentümer an, eine Seite um x zu kürzen und die andere dafür um x zu verlängern. Der Eigentümer kann den Wert für x selbst bestimmen.

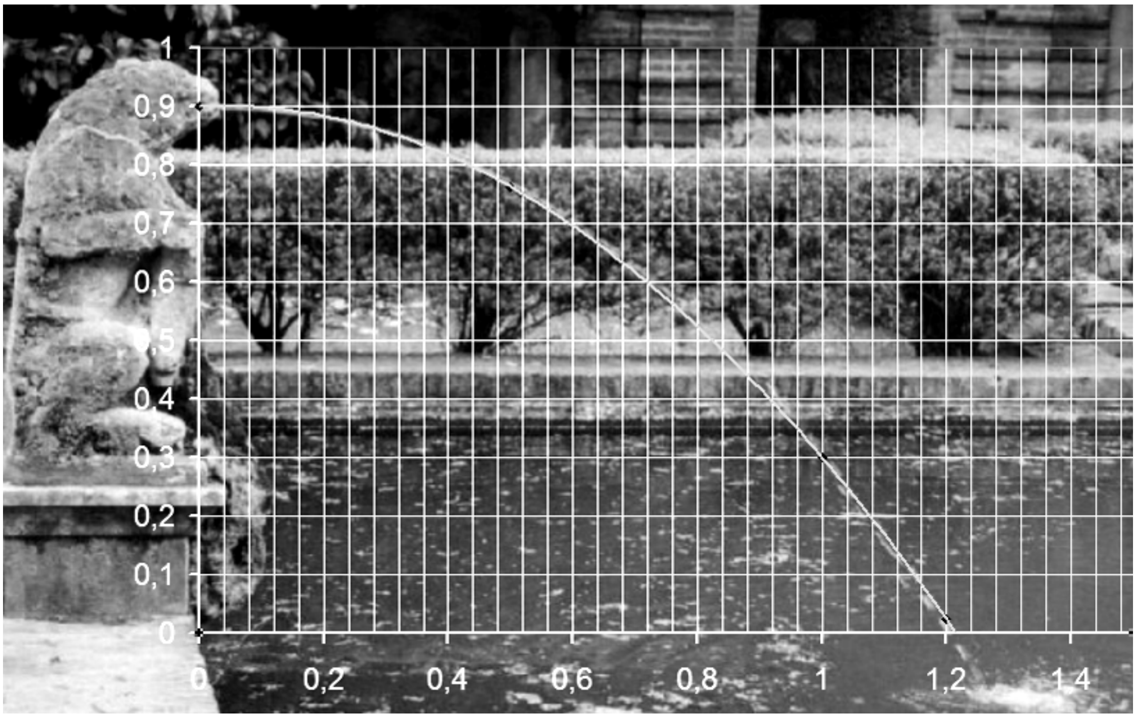
a) Erstelle einen Term, der die neue Grundstücksfläche in Abhängigkeit von x berechnet.

b) Mit welchem x hat der Eigentümer die beste Entscheidung getroffen? Begründe.



Aufgabe 9

Bestimme eine Gleichung, die den Verlauf des Graphen möglichst gut beschreibt. Beschreibe, wie Du Deine Gleichung bestimmt hast.



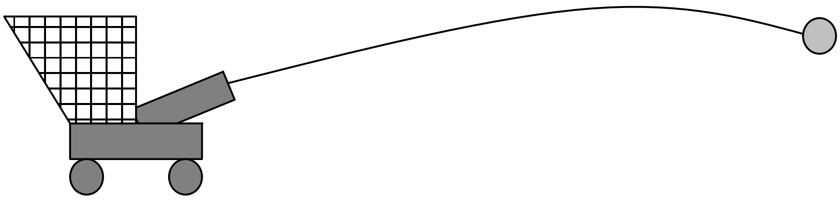
Aufgabe 10

Eine Ballmaschine schießt Tennisbälle in einem Bogen über den Platz. Für die Höhe h über dem Boden und die Entfernung x des Balls von der Ballmaschine gilt die folgende Gleichung:

$h(x) = -0{,}05\,x^2 + 0{,}725\,x + 0{,}375$ (h und x in Metern)

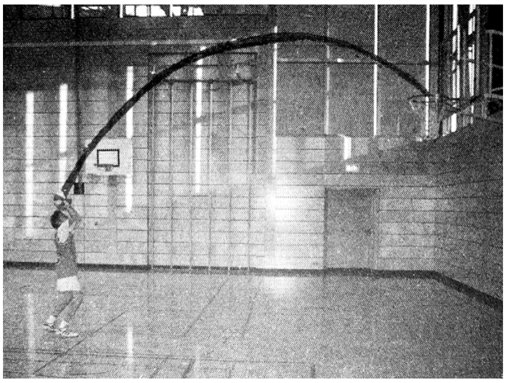
a) Beschreibe, unter Darstellung des Lösungsweges die Flugbahn des Balls durch Angabe von: Abschusspunkt, maximale Flughöhe und Auftreffpunkt.

b) Bestimme die Entfernung des Balls von der Maschine, bei der die Abschusshöhe wieder erreicht wird.



Aufgabe 11

Mithilfe von Messgeräten wurden die folgenden Daten für den Flug eines Basketballs beim Freiwurf aufgezeichnet. Dabei beschreibt x die Entfernung von der Abwurfstelle und h(x) die Höhe des Balls, jeweils in m.



x in m	0	0,5	1	1,5
h(x) in m	2,00	2,75	3,20	3,60

x in m	2	2,5	3	3,5
h(x) in m	3,90	4,05	4,10	3,90

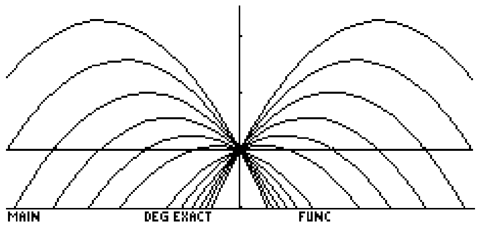
a) Übertrage die Werte aus der Tabelle in den TC und berechne, unter Darstellung Deines Lösungsweges, ein quadratisches Modell.

b) Der Freiwurfpunkt befindet sich in einer Entfernung von 4,75 m zum Basketballkorb. Der Basketballkorb hängt in einer Höhe von 3,05 m. Überprüfe, ob der obige Freiwurf zum Erfolg führt.

Aufgabe 12

Der nebenstehende Screenshot zeigt eine Parabelschar mit der [WINDOW]-Einstellung:

xmin = - 2,5; xmax = 2,5; ymin = - 1; ymax = 2,5



Erzeuge das Bild in Deinem TC und gib die zugehörigen Funktionsgleichungen an.

Das sollst Du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Berechne:

$3{,}4 - 4{,}8 - 1{,}6$ $\qquad (-1)\cdot(-2):(-1)$ $\qquad 25 \cdot 0{,}3$ $\qquad 16^2$

b) Welchen Wert bekommt der Term 3 (5x - 2) für:

x = 2, $\qquad$ x = 0, $\qquad$ $x = \frac{3}{5}$?

c) Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 6 cm und 8 cm lang. Wie lang ist die Hypotenuse?

d) Berechne:

$\sqrt{100-51}$ $\qquad \sqrt{4^2+3^2}$ $\qquad \sqrt{10000}$ $\qquad 0{,}0016$

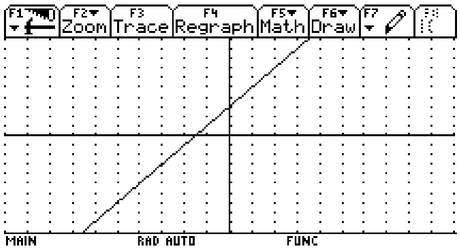
e) Zwei Würfel werden geworfen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass deren Augensumme 3 (10, 12) beträgt?

f) Wie groß sind die Winkel im gleichseitigen Dreieck?

g) Notiere als Bruchzahl und als Prozentzahl: 0,21

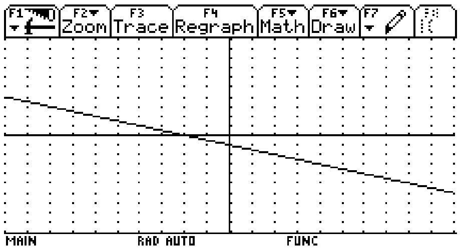
h) 60 % von 120 Schülern kommen mit dem Bus zur Schule. Ein Drittel dieser Schüler bringen ein Getränk mit. Wie viele Schüler sind das?

i) Bestimme die Steigung der Geraden.



j) Multipliziere aus: $x\cdot(x+7)$, $(x-2)\cdot(x+3)$, $(x+4)\cdot(x+4)$

k) Stelle die Geradengleichung auf.



Aufgabe 2

a) Wandle um:

$0{,}01\ \text{m}$ in cm, $2{,}3\ \text{t}$ in kg, $235\ \text{mm}$ in m, $500\ \text{ml}$ in l, $0{,}08\,\text{m}^2$ in m

b) Wie viele Symmetrieachsen hat ein Quadrat (ein gleichseitiges Dreieck)?

c) 0,75 l Lack reichen für 12 m^2. Für wie viel Fläche reicht ein ganzer Liter?

d) Schreibe als Dezimalbruch: $9\frac{3}{8}$.

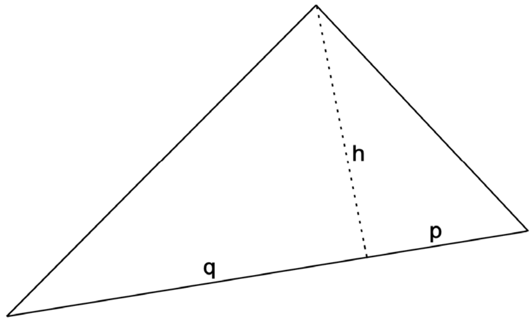
e) Für welchen Wert von x bekommt der Term $5x-2$ den Wert

8, 23, - 7, 3, 0 ?

f) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit einer Münze viermal hintereinander „Zahl"?

g) Vereinfache folgende Terme: $(x+3)\cdot(x-3)$, $(x-2)^2+4x$, $(x+1)^2-(x-1)^2$

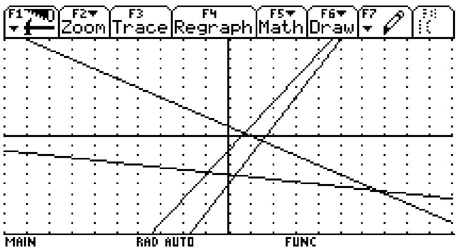
h) Gib einen Term an, mit dem man den Flächeninhalt nebenstehender Figur berechnen kann.



l) Die Wurzel welcher Zahl ergibt 11?

m) Berechne: $\frac{4}{5}+\frac{5}{4}$

n) Bestimme die Funktionsterme derjenigen Funktionen, deren Graphen hier abgebildet sind.



Aufgabe 3

a) Berechne: $2\frac{1}{4} : \frac{3}{4}$

b) Wie zeichnet man eine Strecke der Länge $\sqrt{2}$?

c) Was sind Primzahlen? Gib ein Beispiel.

d) Die Seitenlängen eines Quadrates wurden verdoppelt. Wie verändert sich der Umfang?

e) Ein 10 m hoher Maibaum wird auf dem Dorfplatz aufgestellt. Er wird mit Seilen gehalten, die an seiner Spitze befestigt werden. Jedes Seil soll so lang sein, dass es im Boden in acht Meter Entfernung vom Fuß des Baumes verankert werden kann. Wie lang muss jedes der Seile sein?

f) Berechne 75% von 200 kg.

g) Was ist der Unterschied zwischen einem stumpfen und einem überstumpfen Winkel?

h) Faktorisiere: $x^2 - 16$, $x^2 + 6x + 9$, $x^2 - 144$, $x^2 + 5x + 6$

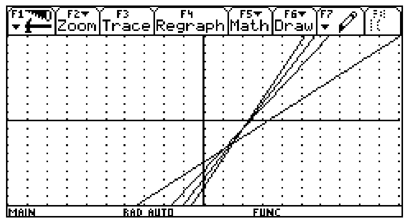
i) Berechne: $25 - (3{,}5 - 1) \cdot 2$

j) Für welchen Wert von x bekommt der Term $2x - \frac{1}{2}$ den Wert

3,5 ; 19,5 ; 0 ; - 6,5 ?

k) In einem Zoo-Gehege befinden sich 20 Kamele und Dromedare. Insgesamt haben sie 31 Höcker. Wie viele Kamele und wie viele Dromedare sind in diesem Gehege?

l) Bestimme die Steigung der abgebildeten Geraden.



Aufgabe 4

a) Julia hat für ihr Handy einen Tarif gewählt, bei dem sie 5 Euro Grundgebühr pro Monat und 10 Cent pro Einheit zahlt. Wie viel hat sie pro Monat zu zahlen, wenn sie mit ihrem Handy 15 (25, 110, 580) Einheiten vertelefoniert?

b) Kann ein Dreieck konstruiert werden, dessen Seiten die Längen 7 cm, 10 cm und 2 cm besitzen?

c) Fasse zusammen: 41b – 15b + 7b

d) Bei einem Würfel halbieren sich die Kantenlängen. Wie verändert sich dadurch der Oberflächeninhalt?

e) Stelle einen Term für den Umfang nebenstehender Figur auf.
Wie viele Symmetrieachsen besitzt die Figur?

f) Donald weiß, dass in jedem siebten Überraschungsei eine Figur steckt. Er hat zwei dieser Eier gekauft. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich darin mindestens eine Figur befindet?

g) Gib das Volumen von 75 Litern in cm³ an.

h) Multipliziere aus: $x \cdot (5x + 9)$, $(x + 1) \cdot (x - 2)$, $3 \cdot (x + 9)^2$

i) Berechne das Dreifache des Terms 7x + 2.

j) Welche Zahl muss man mit 13 multiplizieren, um 91 zu erhalten?

k) Berechne: $\frac{2}{3}$ von 90 €, $\frac{3}{5}$ von 120 m und $\frac{5}{8}$ von 160 l

Aufgabe 5

a) Aus wie vielen Minuten besteht eine Drittel Stunde?

b) Der Term $(x + a)^2$ nimmt den Wert 64 an, wenn x = 0 ist. Wie groß ist a?

c) Ein Auto braucht etwa 5 l Benzin pro 100 km. Wie viel Benzin braucht es für 60 km?

d) Wie müsste ein Glücksrad aussehen, wenn dessen drei mögliche Ergebnisse die Wahrscheinlichkeiten 0,1 , 0,3 und 0,6 haben?

e) Wie zeichnet man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Hypotenuse 7 cm lang ist?

f) Berechne:

$\frac{3}{4} + \frac{1}{2}$, $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{8}$, $\frac{12}{9} + \frac{5}{18}$, $\frac{\sqrt{361}}{38}$, $\sqrt{\frac{225}{196}} + \frac{3}{7}$

g) Ein Sparguthaben von 2000 € ist zu einem festen Zinssatz von 3,5 % p.a. angelegt worden.
Wie viel wird dem Konto nach einem Jahr an Zinsen gutgeschrieben?

h) Über 4 Transportbänder wird ein Frachtschiff in 5 Stunden geleert. Wie viel Zeit würde man wohl sparen, wenn man ein Transportband zusätzlich einsetzte?

i) Wie viele Symmetrieachsen besitzt ein gleichschenkliges Trapez?

j) Ziehe vom Term 8 – 3x den Term 8x – 3 ab.

k) Ernie und Bert besitzen zusammen 360 €. Bert hat doppelt so viel Geld wie Ernie.
Wie viel Geld besitzt Ernie?

Aufgabe 6

a) Berechne 45 % derjenigen Zahl, die mit 3 multipliziert 600 ergibt.

b) Löse : $3x + 4y = 4$
$\wedge \quad x + 8y = 8$

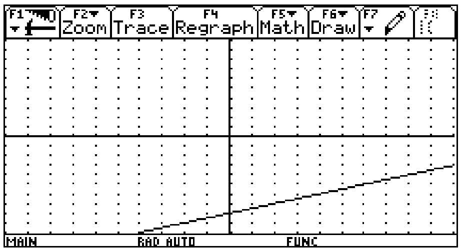
c) Bestimme die Nullstellen der Terme: $4x - 1$, $5x + 1$ und $18x - 9$

d) Gib ein Achtel von 1.600 m an.

e) Marvin wirft gleichzeitig zwei Spielwürfel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass er die Augensumme 11 erhält?

f) Jennifer erhält nach einem Jahr für ihr Sparguthaben von 500 € immerhin 20 € Zinsen gutgeschrieben. Wie viel Prozent Zinsen gewährt ihr die Sparkasse?

g) Stelle die Geradengleichung auf.



h) Berechne: $(x + 5)^2$ für folgende Werte von x: 1, - 3, 0, - 17 und 95

i) Welche Seitenlänge besitzt ein Quadrat, dessen Flächeninhalt 324 cm² beträgt?

j) Von insgesamt 140 Säcken Gänsefedern kauft Frau Holle 28. Wie viel Prozent sind das?

k) Faktorisiere: $6x + 12$, $27x - 9$, $-39y + 26$, $x^2 - 4$, $a^2 - 121$.

Aufgabe 7

a) Gib die möglichen Abmessungen für einen Quader von 5 Liter Volumen an.

b) Berechne: $-8 \cdot (-1{,}7)$

c) Wie viel sind 40% von 150 €?

d) Wie lautet die Lösungsmenge von $x^2 = -49$?

e) Wird eine Figur bei zentrischer Streckung mit dem Streckfaktor 1,2 größer oder kleiner?

f) Auf welcher Gerade liegen alle Punkte, deren Abstand zur x-Achse genau so groß ist wie ihr Abstand zur y-Achse?

g) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit mit drei Würfeln drei gleiche Zahlen zu werfen?

h) Berechne: $(3 + 9)^2$

i) Gib mögliche Maße der Höhe und der Grundseite für ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 15 cm² an.

j) Berechne: $\frac{1}{5} + \frac{2}{7}$

Aufgabe 8

a) Welchen Flächeninhalt hat in etwa ein Stellplatz für ein Auto?

b) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, mit einer Münze dreimal nacheinander Kopf zu werfen?

c) Welchen Wert hat der Term $3a \cdot (a - 7)$ für $a = 2$?

d) Wie verändert sich der Flächeninhalt einer Figur bei zentrischer Streckung mit dem Streckfaktor 2?

e) Berechne: $\frac{2}{5} + \frac{4}{7}$

f) Gib 1,25 als Bruch an.

g) Wie viele Lösungen kann die Gleichung $3x + 1 = 7$ haben?

h) Berechne: $4{,}5 \cdot 7$

i) Wie bestimmt man den Mittelpunkt des Inkreises eines Dreiecks?

j) Wie viele Nullstellen hat die Parabel mit der Gleichung $y = x^2 + 3$?

Aufgabe 9

a) Gib die Lösungen zu $x^2 = 400$ an.

b) Berechne: $(x - 9)^2$

c) Wie groß ist der Rauminhalt eines Würfels mit der Kantenlänge 3 cm?

d) Unter welchen Bedingungen sind zwei Figuren mathematisch ähnlich?

e) Wie heißt die längste Sehne des Kreises?

f) Welchen Wert hat der Term $a \cdot (a + 5)$ für $a = -3$?

g) Wie wahrscheinlich ist es, bei zwei Münzwürfen genau einmal Zahl zu erhalten?

h) Gib die Scheitelpunktkoordinaten der Parabel mit der Gleichung $y = x^2 - 9$ an.

i) Berechne: $\frac{3}{7} \cdot \frac{4}{5}$

j) Löse: $-3x + 7 = 15$

Aufgabe 10

a) Wie heißt der Ort aller Punkte, die von einem Punkt Z den Abstand 9 cm haben?

b) Sind zwei Dreiecke kongruent, wenn sie in der Größe der Winkel übereinstimmen?

c) Ein Dreieck mit dem Flächeninhalt 24 cm² hat eine Grundseite der Länge 4 cm. Wie lang ist die Höhe?

d) Wie viel sind 40 % von 300 €?

e) Wie viel Prozent sind 60 € von 360 €?

f) Bestimme die Lösung der Gleichung $x \cdot (x - 4) = 0$.

g) Wie wahrscheinlich ist es, mit zwei Würfeln eine 5 zu werfen?

h) Berechne: $\frac{3}{8} \cdot \frac{5}{7}$

i) In wie viele Dreiecke kann ein Quadrat durch Einzeichnen der Diagonalen zerlegt werden?

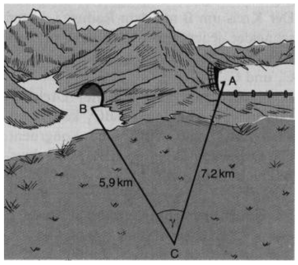
j) Nenne die Gleichung einer quadratischen Funktion, die keine Nullstellen hat.

Das ist dein Basiswissen

Aufgabe 1

Ein Straßentunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden. Die Entfernung zwischen den Tunneleingängen A und B kann nicht direkt gemessen werden. Um die Länge des Tunnels zu bestimmen, werden von einem geeigneten Punkt C aus die Entfernungen zu den Tunneleingängen A und B sowie der Winkel γ gemessen.

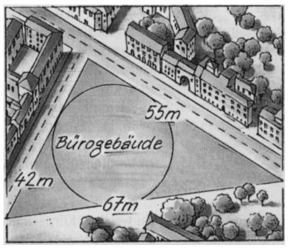
Man erhält $\overline{CA} = 7{,}2$ km; $\overline{CB} = 5{,}9$ km und $\gamma = 65°$.
Bestimme die Tunnellänge.



Aufgabe 2

Die Bürger von Neustadt wünschen sich für die Architekturausstellung ein modernes Bürogebäude, das nicht eckig, sondern kreisförmig und vollständig von Glas umgeben ist. Es kommt aber aufgrund der Größe nur ein Grundstück an der Straßenecke in Frage.

a) Bestimme für die Bürger von Neustadt die maximalen Ausmaße des neuen Bürogebäudes.
b) Welchen Durchmesser darf das Gebäude haben, wenn ein 80 cm breiter Weg zwischen Gebäude und Straße geplant ist?



Aufgabe 3

Kannst du aus den drei gegebenen Größen ein Dreieck konstruieren?
Wenn ja, dann führe die Konstruktion durch. Wenn nein, dann begründe, warum es nicht geht.

a) $\alpha = 45°$, $\beta = 68°$ und $\gamma = 67°$
b) $\alpha = 110°$, $a = 6{,}6$ cm und $c = 4{,}7$ cm
c) $a = 10$ cm , $b = 4$ cm und $c = 5{,}5$ cm

Aufgabe 4

Ein Straßentunnel soll geradlinig durch einen Berg gebaut werden. Die Entfernung zwischen den Tunneleingängen A und B kann nicht direkt gemessen werden.
Um die Länge des Tunnels zu bestimmen, werden von einem geeigneten Punkt C aus die Entfernungen zu den Tunneleingängen A und B, sowie der Winkel γ gemessen. Man erhält:
$|CA| = 5{,}6$ km , $|CB| = 8{,}8$ km und $\gamma = 52°$.
Bestimme die Tunnellänge.

Aufgabe 5

a) Konstruiere ein Drachenviereck ABCD aus $a = 3{,}6$ cm, $f = 5$ cm und $\beta = 100°$.
Die Symmetrieachse des Drachens liege auf der Diagonalen AC.
b) Welche Länge darf für die Diagonale BD gewählt werden, damit bei sonst unveränderten Daten der vorigen Teilaufgabe eine Konstruktion überhaupt möglich ist?

Aufgabe 6

Eine Münze und ein Würfel werden nacheinander geworfen. Zeigt die Münze Wappen und der Würfel eine 4, hat Spieler A gewonnen. Zeigt die Münze Zahl und der Würfel eine Primzahl, hat B gewonnen. In allen anderen Fällen ist das Spiel unentschieden.

a) Gib alle möglichen Spielergebnisse an.
b) Gib ein Baumdiagramm für das Spiel an.
c) Wie ändert sich die Lösung zu a) und b), wenn erst der Würfel und dann die Münze geworfen wird?
d) Da Spieler A sich benachteiligt fühlt, fordert er eine Änderung der Spielregeln, sodass das Spiel gerecht wird. Mach einen Vorschlag.

Aufgabe 7

Aus einer Klasse werden 6 Personen ausgewählt. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei dieser Personen im gleichen Monat Geburtstag haben.
Um diesen Vorgang zu simulieren, benötigen wir Zufallszahlen zwischen 1 und 12.

a) Beschreibe, wie Du 6 Zufallszahlen mit dem Taschencomputer erzeugen kannst.
b) Jan würfelt 6-mal mit zwei Würfeln und erhält mithilfe der jeweiligen Augensumme auch ein Ergebnis. Beurteile die beiden Vorgehensweisen auf ihre Eignung als Simulation.

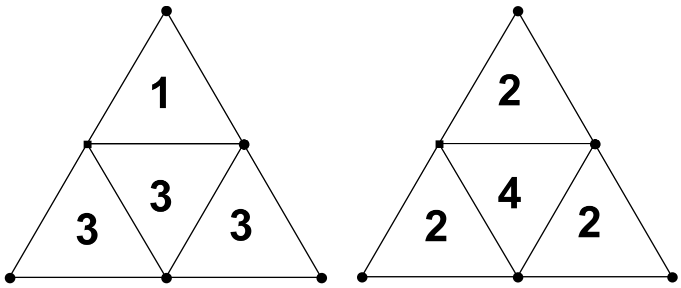
Aufgabe 8

Hans hat in seiner Hosentasche 4 rote, 6 grüne und 8 blaue gleich große Murmeln.

a) Er zieht eine Murmel. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, (I) eine rote, (II) eine grüne, (III) eine blaue Murmel aus der Hosentasche zu ziehen?
b) Hans legt die in a) gezogene Kugel wieder zurück in seine Hosentasche! Dann zieht er nacheinander zwei Murmeln aus seiner Hosentasche, wobei er die erste Murmel zurücklegt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit zieht er (I) zwei rote, (II) zwei blaue, (III) zwei gleichfarbige Murmeln? Zeichne auch den zugehörigen Baum.
c) Wie ändert sich die Wahrscheinlichkeit, zwei rote Murmeln zu ziehen, wenn Hans die erste Murmel nicht zurücklegt? Begründe.

Aufgabe 9

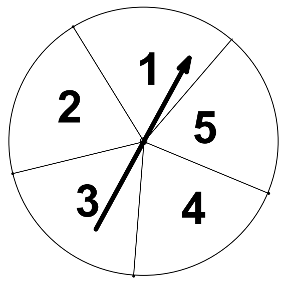
Es werden zwei Tetraeder mit nebenstehenden Netzen geworfen. Es gewinnt der Tetraeder, bei dem die höhere Augenzahl unten liegt.
Welchen Tetraeder würdest Du wählen? Begründe.



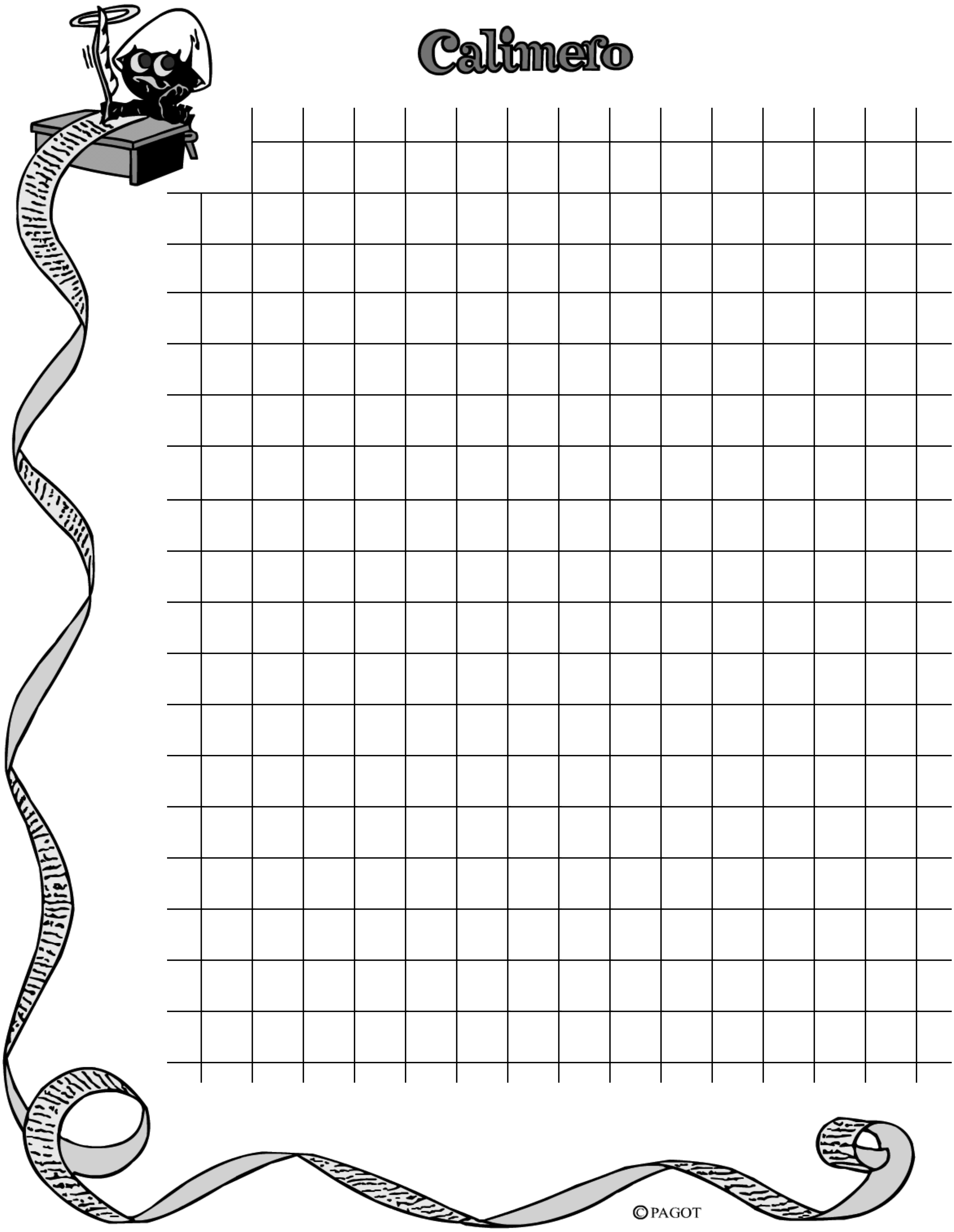
Aufgabe 10

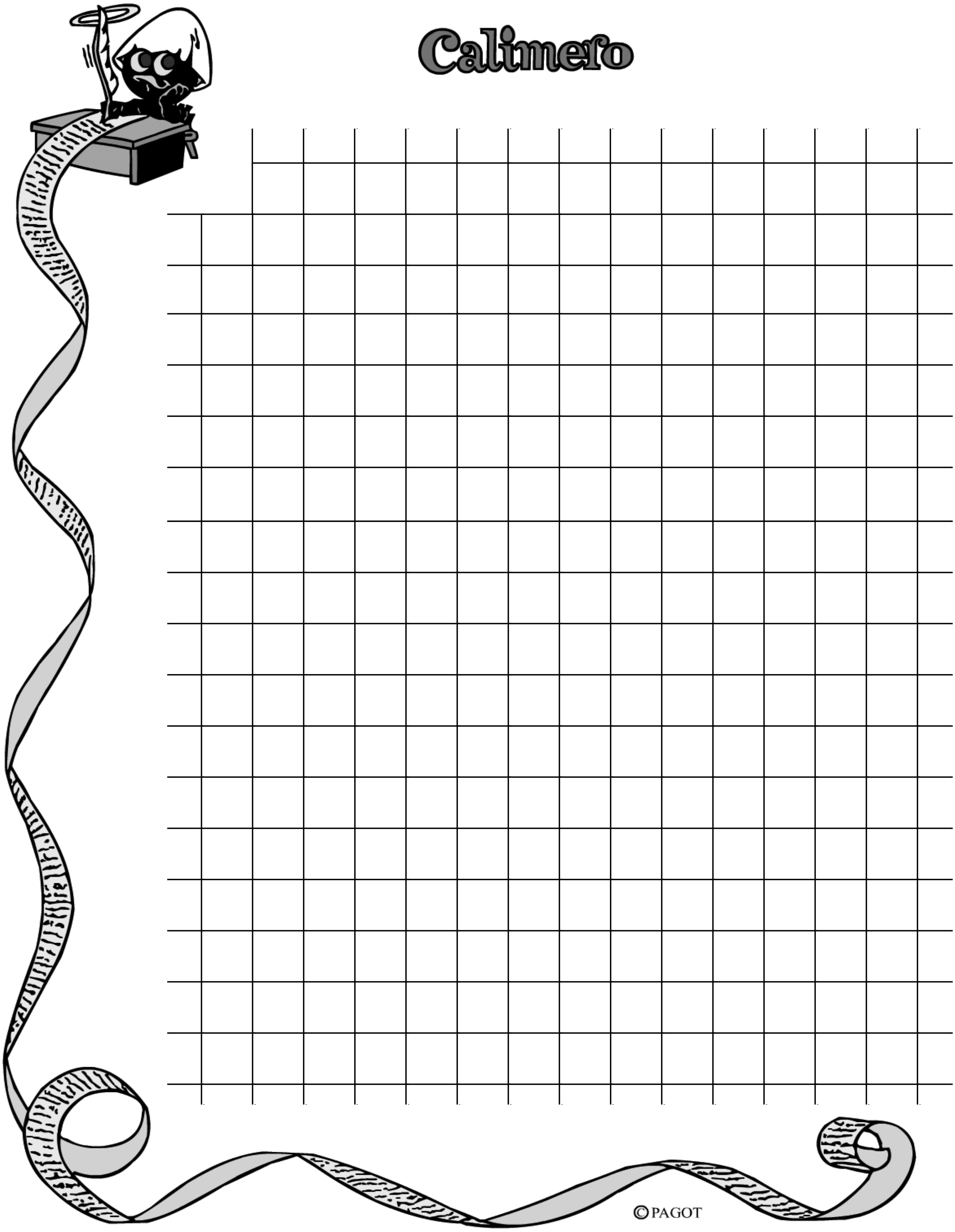
Nebenstehendes Glücksrad trägt die Ziffern 1 bis 5 in gleichgroßen Feldern. Es wird dreimal gedreht und die drei Ziffern werden hintereinander als dreistellige Zahl geschrieben.
Bestimme die Wahrscheinlichkeit dafür, dass

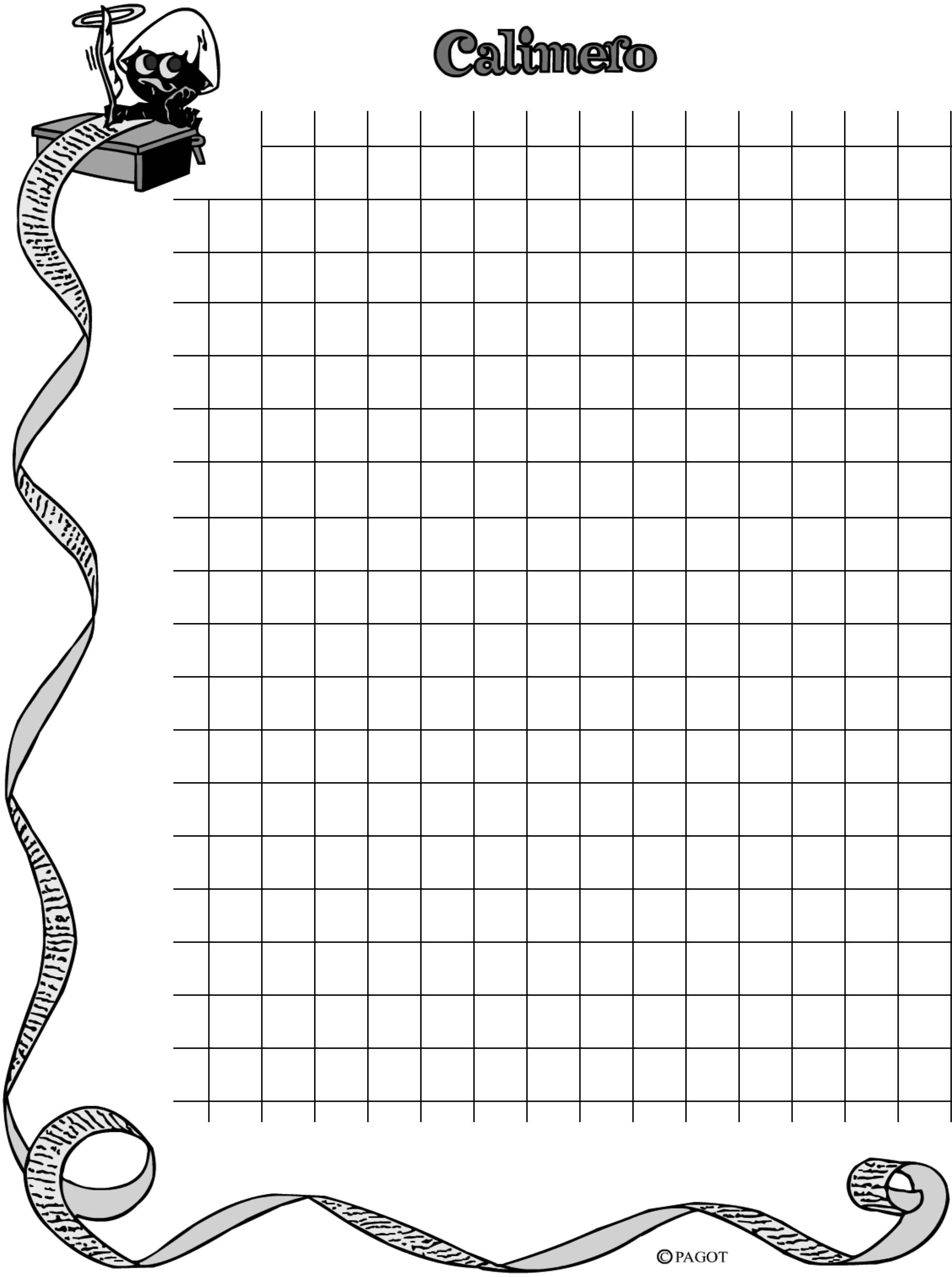
a) die Zahl aus drei gleichen Ziffern besteht,
b) in der Zahl die Ziffer 1 zweimal auftritt,
c) die Zahl ungerade ist.



Calimero


Calimero
©PAGOT


Calimero
© PAGOT


Calimero
©PAGOT