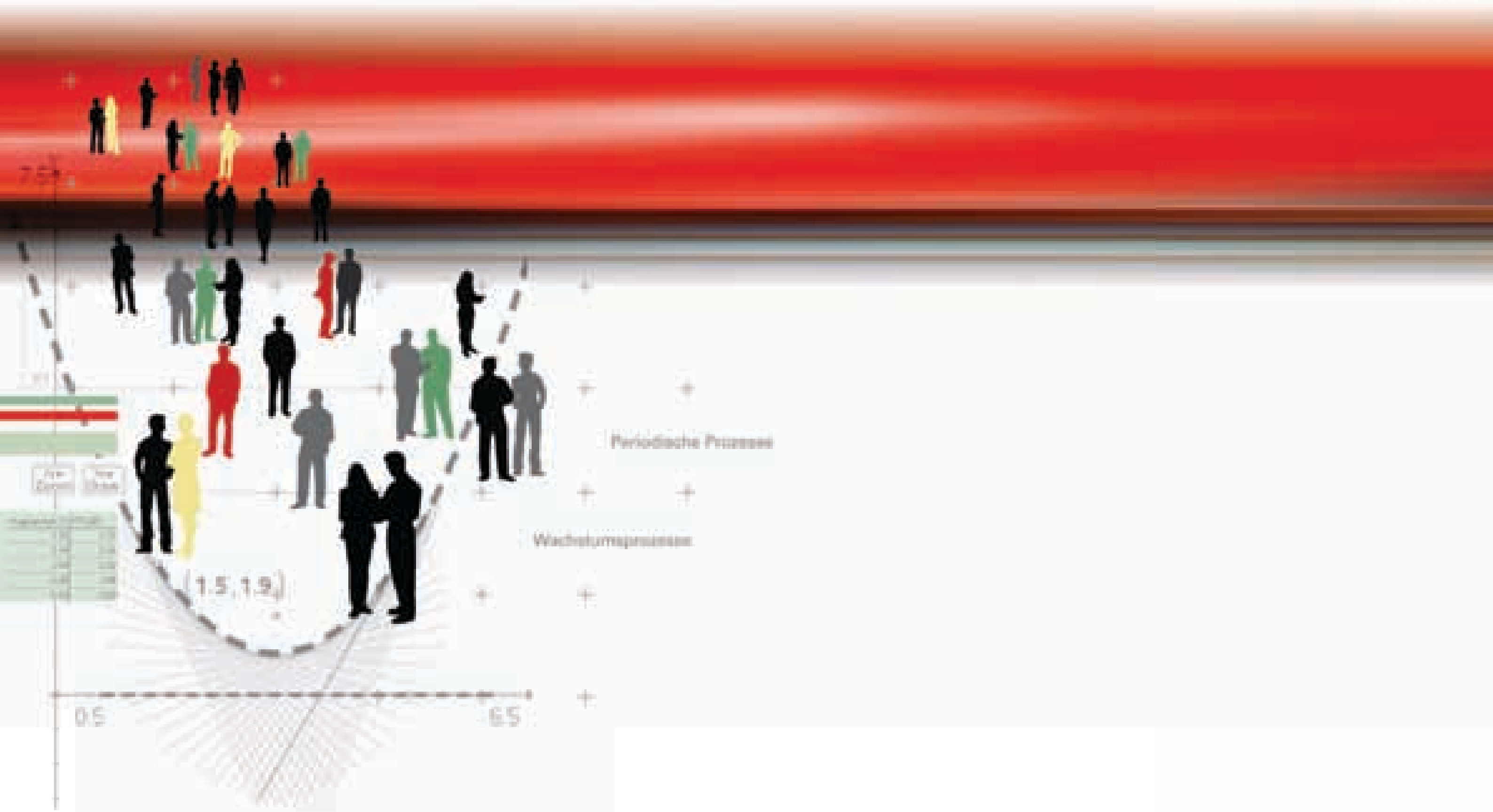
T³ DEUTSCHLAND

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 8

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch † (Hrsg.)



Niedersachsen

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 8

Regina Bruder, Wilhelm Weiskirch † (Hrsg.)

Die Materialien entstanden im Rahmen eines Schulversuches des Landes Niedersachsen mit dem Thema:
Computer-Algebra-Systeme im Mathematikunterricht der Jahrgänge 7-10 des Gymnasiums
hier: Ein Schulversuch zur Entwicklung eines Unterrichtskonzepts sowie von Materialien zum Einsatz im Unterricht mit wissenschaftlicher Begleitung

Die wissenschaftliche Begleitung wurde durch Frau Prof. Dr. Regina Bruder von der TU Darmstadt übernommen, Herr StD Wilhelm Weiskirch vom Ratsgymnasium Stadthagen koordinierte die Durchführung.

Unterstützt wurde der Schulversuch von der Firma Texas Instruments, die dem Verein n-21 angehört, durch die Bereitstellung der wissenschaftlichen Begleitung, die Übernahme der Veröffentlichungskosten und die Finanzierung von Arbeitstagungen.

Verlag:
Westfälische Wilhelms-Universität Münster, Zentrum für Lehrerbildung

Vorwort

Liebe Kolleginnen, liebe Kollegen,.

dieses Buch ist in einem Schulversuch des Landes Niedersachsen extra zu dem Zweck entwickelt worden, um mit dem Taschencomputer (TC) ein durchgängiges Konzept für einen effektiven Unterricht zu haben. Neben neu entwickelten Aufgaben wurden auch Aufgaben aus Lehrbüchern ausgewählt, die speziell für einen Unterricht mit dem Einsatz eines TC geeignet sind.
Im Schulversuch konnte gezeigt werden, dass ein Unterricht mit diesem Aufgabenmaterial und dem Einsatz eines Taschencomputers einen Mehrwert an mathematischer Kompetenz erbringen bzw. diese wesentlich unterstützen kann. Es konnte auch gezeigt werden, dass durch den Einsatz des Taschencomputers die Kommunikation der Schülerinnen und Schüler unterstützt und eine Vorgehensreflexion gefördert wurde. Von großer Bedeutung für eine erfolgreiche Arbeit mit einem Taschencomputer ist ein ganzheitliches Unterrichtskonzept, in dem darauf geachtet wird, dass neben offenen, kreativitätsfördernden Aufgaben mit Rechnerunterstützung immer wieder auch mathematisches Grundkönnen ohne Rechner gefördert und eingefordert wird.
Um den Schülerinnen und Schülern mehr Verantwortung für ihr eigenes Lernen zu übertragen, ist es sinnvoll, ihnen Gelegenheit zur Selbsteinschätzung vor einer bewerteten Leistungskontrolle zu geben. Mit den "Ich kann ..."-Fragen werden die zum jeweiligen Thema wichtigsten inhaltlich gebundenen Fähigkeiten und Fertigkeiten der jeweiligen Unterrichtseinheit beschrieben.
Die Aufgabensammlungen für die einzelnen Unterrichtseinheiten sind so zusammengestellt, dass sie die in den Bildungsstandards geforderten Kompetenzen unterstützen und fördern. Zu dem Themenheft für Schülerinnen und Schüler gibt es entsprechend entwickelte Handreichungen für Sie.

Dieses achte Themenheft hat vier Kapitel.

1. **Periodische Prozesse**
2. **Wachstumsprozesse**
3. **TC-Hilfen**
4. **Kopfübungen - Basiswissen**

Im Themengebiet ‚Periodische Prozesse' geht es zunächst um die allgemeinen Eigenschaften und Kenngrößen periodischer Prozesse. Dann werden die Sinus- und die Kosinusfunktion eingeführt. Wie schon in vorangegangenen Themengebieten werden auch bei dieser Funktionenklasse Parametervariationen durchgeführt. Wiederum wird der TC sinnstiftend eingesetzt, um die Bedeutung der Parameter zu entdecken. Außerdem wird die Sinus-Funktion zur Modellierung spezieller periodischer Prozesse herangezogen.

Im Mittelpunkt des Themengebietes ‚Wachstumsprozesse' steht die Modellierung. Hier lernen die Schülerinnen und Schüler zunächst, wie man Wachstumsprozesse neben der schon bekannten funktionalen Beschreibung auch rekursiv beschreiben kann. Lineares und exponentielles Wachstum werden besonders untersucht und von anderen Wachstumsarten abgegrenzt. Dann wird die Überlagerung dieser beiden Wachstumsarten betrachtet und untersucht, unter welchen Voraussetzungen sich begrenztes Wachstum einstellt. Das Verständnis des mathematischen Grenzwertbegriffs ist wesentlich für den zukünftigen Mathematikunterricht. Hier werden demnach wichtige Grundlagen für die Oberstufe gelegt. Um Exponentialgleichungen lösen zu können, wird der Logarithmus in einem weiteren Kapitel eingeführt. Auch die Exponentialfunktion wird mittels Parametervariation mit Hilfe des TC in bewährter Weise analysiert.

Vermischte Kopfübungen sind eine **rituelle Lerngelegenheit** für das Wachhalten von mathematischem Grundwissen aus früheren Themen und Klassenstufen. Sie enthalten jeweils Grundaufgaben bzw. deren Umkehrungen zu verschiedenen nicht zum aktuellen Stoff gehörenden Begriffen, Verfahren oder Zusammenhängen, die dauerhaft verfügbar sein sollen. Sie sind Teil einer Selbsteinschätzung der Lernenden mit dem Ziel, Aktivitäten zum Füllen individueller Lücken anzuregen.
In jedem Unterrichtsbaustein lernen die Schülerinnen und Schüler wichtige mathematische Begriffe, Zusammenhänge und Verfahren sowie deren typische Anwendungen kennen. Diese Lerninhalte sind auch für erfolgreiches Weiterlernen von zentraler Bedeutung. Wir nennen solche Lerninhalte kurz **Basiswissen.**
In diesem Teil finden Sie Aufgaben, die alle wichtigen Basiskompetenzen der vergangenen Jahre aus den Bereichen Zahl, Messen, Raum und Form, Funktionale Zusammenhänge sowie Daten und Zufall wiederholen. Hier finden Sie einfache Aufgaben, für den Fall, dass die Schülerinnen und Schülern wenig Erinnerung haben, aber auch komplexere Aufgaben, um zu testen, wie viel noch gekonnt wird. Die Aufgaben aus diesem Teil helfen durch regelmäßige eigenständige Arbeit die Wissenslücken wieder zu schließen, die Schülerinnen und Schüler erinnern sich an mathematische Kenntnisse und mobilisieren ihre Fertigkeiten sowie Fähigkeiten. Langfristig kann sich so eine hohe mathematische Kompetenz entwickeln und ein gutes Basiswissen entwickeln. Diese Aufgaben zum Basiswissen sind so gestaltet worden, dass sie gleichzeitig eine Vorbereitung auf das nächste Kapitel sind.

Die Autoren dieses Themenheftes wünschen Ihnen mit dem Taschencomputer und den Arbeitsmaterialien im Verbund mit den Handreichungen viel Erfolg!

Bergkirchen im Mai 2012

INHALTSVERZEICHNIS

Periodische Prozesse

Wachstumsprozesse

Training

C A l i M E R O

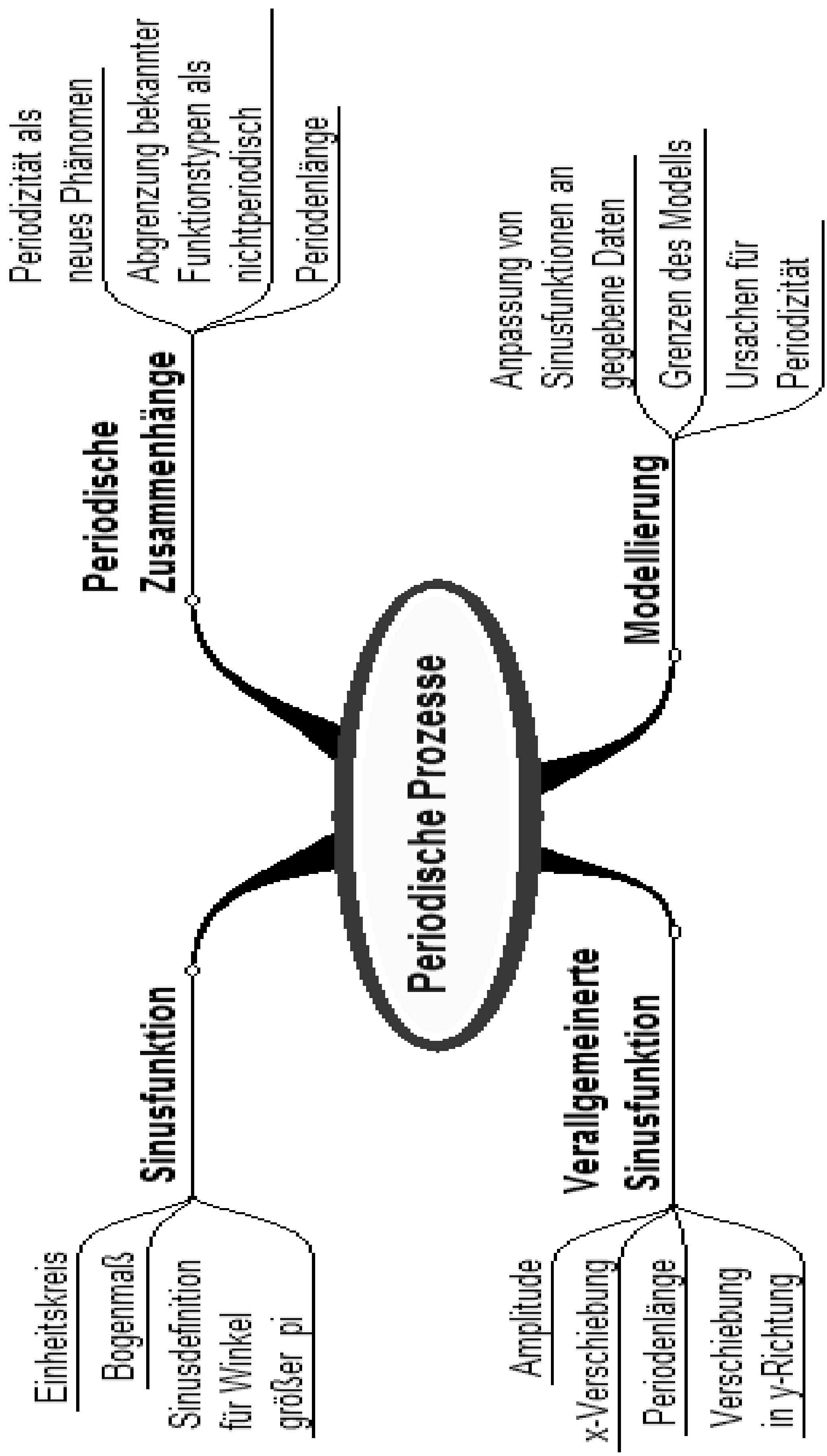
Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

Periodische Prozesse

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Mind Map mit Inhalten



Prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	Probleme mathematisch lösen	Mathematisch Modellieren	Mathematische Darstellungen verwenden	Mit symbolischen, formalen, …	Kommunizieren
• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache • kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren	• stellen sich inner- und außermathematische Probleme und beschaffen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen • wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese an	• wählen, variieren und verknüpfen Modelle zur Beschreibung von Realsituationen • analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Realsituation		• nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge • nutzen eine Tabellen-kalkulation und ein CAS-System zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen	• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache benutzen • präsentieren Problembe-arbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	Größen und Messen	Raum und Form	funktionaler Zusammenhang	Daten und Zufall
			• erkennen funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Grafen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie • identifizieren und klassifizieren Funktionen in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen • nutzen die Sinusfunktion als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners • stellen Funktionen durch Terme und Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Term, Gleichung, Tabelle, Graph • modellieren Sachsituationen durch Funktionen	

Hinweise zu rechnerfreien und rechnerspezifischen Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit "Periodische Prozesse" mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in Klassenarbeiten oder in Kurztests nachgewiesen bzw. abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler

1. rechnen Gradmaß in Bogenmaß um und umgekehrt für alle Vielfachen von $\pi/6$ und $\pi/4$.
2. schätzen die Sinuswerte mithilfe der Eintragung im Einheitskreis ab, insbesondere hinsichtlich der Vorzeichen.
3. kennen die Sinuswerte für 0, $\pi/2$ und alle Vielfachen von $\pi/2$.
4. lesen oder schätzen aus Graphen die Periodenlänge, die Verschiebungen in x- und y-Richtung und die Amplitude ab.
5. erstellen bei gegebener Periodenlänge, Amplitude und x- sowie y-Verschiebung den Term einer geeigneten Sinusfunktion.
6. können den Graphen der Sinusfunktion sowie gestreckte und verschobene Graphen anhand des gegebenen Funktionsterms skizzieren (Nullstellen, Extremstellen).

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

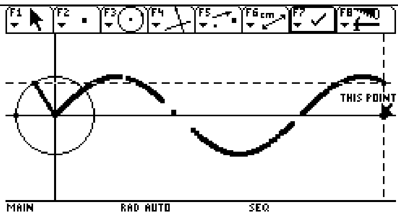
1. Wählen des richtigen Winkelmodus
2. die Ausgabe mit unendlich vielen Lösungen korrekt interpretieren (@n)
3. die Problematik des trigonometrischen Regressionsmoduls beachten und das Ergebnis auf seine Sinnhaftigkeit überprüfen

Thema 1: Periodische Vorgänge	**Dauer:** 2 Stunden
Vor der detaillierteren Untersuchung trigonometrischer Funktionen sollen im Einstieg einerseits die Eigenschaft der Periodizität bei verschiedenen Vorgängen aus Natur und Technik verdeutlicht und andererseits die Begriffe Periodenlänge und Amplitude eingeführt werden. Dabei werden auch Vorgänge betrachtet, die sich nicht durch einfache trigonometrische Funktionen beschreiben lassen.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.1 bis 1.4 (Folienvorlage); CABRI-Datei „Sinus.v2a“ aus dem Ordner „Daten“ SM 1.1 bis 1.3	

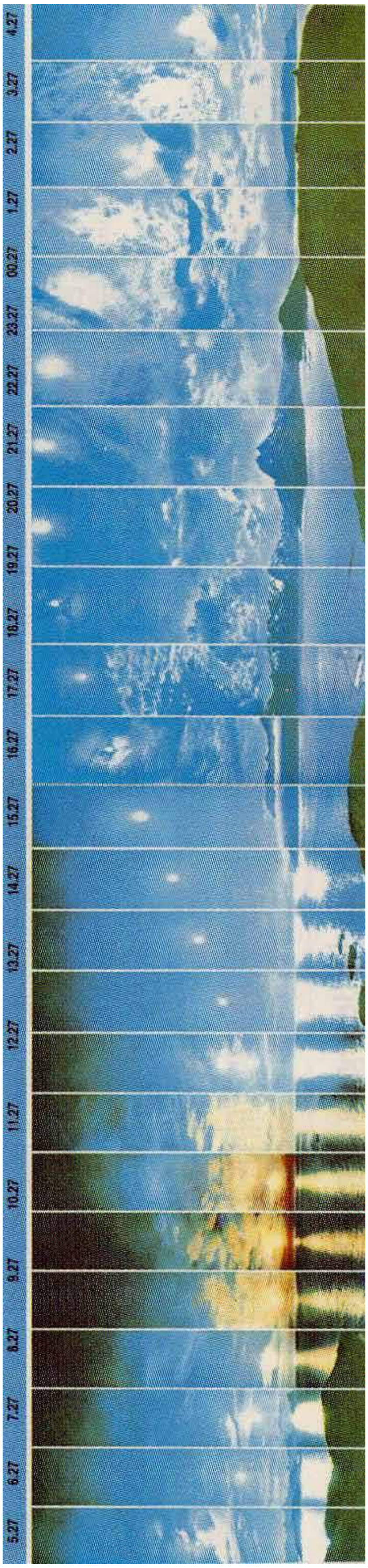
Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Die Schüler bearbeiten Aufgabe 1 und präsentieren anschließend ihre Ergebnisse anhand der Folie am OHP. Schüler beschreiben strukturelle Gemeinsamkeiten. Die Vorgänge setzen sich aus kleinen Abschnitten zusammen, die sich in immer gleicher Weise wiederholen.	SM 1.1 Aufg. 1 LM 1.1	Die Schüler sollen hier eine Vorstellung von periodischen Vorgängen gewinnen und diese verbalisieren. Dabei müssen auch Grenzen des Modells thematisiert werden (v.a. Aufg. 1c).
Erarbeitung: Die Schüler bearbeiten Aufgabe 2 schriftlich in Partnerarbeit. Ein Schülerpaar zeichnet den Graphen auf Folie und präsentiert ihn anschließend per OHP. Anhand des Graphen werden die Begriffe Periodenlänge und Amplitude eingeführt. Vorgänge, die sich in regelmäßigen (meist zeitlichen) Abständen immer wieder in gleicher Weise wiederholen, nennt man periodisch. Der sich stets wiederholende Abstand heißt Periodenlänge. Ergebnisse hier: Periodenlänge p = 20 min; Amplitude a = 130 m	Blanko-Folie; SM 1.2 Aufg. 2	Es ist zu verdeutlichen, dass die Amplitude die Hälfte der Höhen-differenz ist.
Vertiefung: Entsprechend der Aufgabe 3 sollen eigene Beispiele mit verschiedenen Periodenlängen von den Schülern benannt und dabei Vorstellung und Begrifflichkeit vertieft werden.	SM 1.2 Aufg. 3	Auch Vorgänge, die sich nicht vollkommen exakt wiederholen, können im Rahmen der Modellie-rung als periodisch bezeichnet werden.
Hausaufgabe: Aufgabe 4	SM 1.2 Aufg. 4	„Fadenpendel“ Experiment mit abnehmender Amplitude

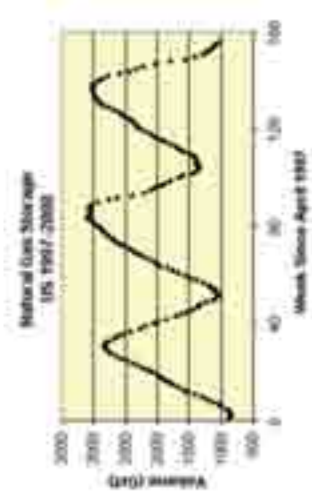
Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe	SM 1.2 Aufg. 4	Hier sollen die Festlegung der Ruhelage auf der x-Achse und die Begriffe Periodenlänge und Amplitude erneut thematisiert werden.
Übung: Die Schüler bearbeiten zur Anwendung und Übung die Aufgabe 5. Nach deren Besprechung (am OHP) wird der Bezug zu funktionalen Zusammenhängen hergestellt: Die Vorgänge können alle grafisch dargestellt werden, wobei die „x-Achse“ im Allgemeinen für die Zeit und die „y-Achse“ für die zugeordnete Größe verwendet wird.	SM 1.2 Aufg. 5 Blanko-Folien	Einzelarbeit Formalisierung möglich: $f(x) = f(x+p)$ p: Periodenlänge
Vertiefung: Die Schüler bearbeiten zur Vertiefung die Aufgabe 6 a. Sie zeichnen dabei mittels Projektion am Einheitskreis den Graphen der Sinusfunktion und tragen näherungsweise die Funktionswerte für ausgewählte Winkel in eine Wertetabelle ein. Bei der Besprechung der Schülerlösungen (am OHP) werden Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Aufgaben 5 und 6 herausgearbeitet.	SM 1.3 Aufg. 6a LM 1.2	Partnerarbeit
Ergänzung:  Zur Veranschaulichung wird die vorbereitete Datei verteilt, mit der die Schüler den Graphen dynamisch aus dem Einheitskreis entwickeln können. Aufgrund der Eindeutigkeit der Zuordnung x → y handelt es sich um Funktionen, speziell: <u>periodische Funktionen</u>.	sinus.v2a LM 1.3 LM 1.4	
Hausaufgaben: Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten die Teile b und c der Aufgabe 6 des SM 1.2 sowie folgenden Aufgabe: „Begründe mithilfe der dir bekannten Eigenschaften von Potenzfunktionen, dass diese sich nicht eignen, die besprochenen Vorgänge zu beschreiben.“	SM 1.3 Aufg. 6 b und c	

LM 1.1



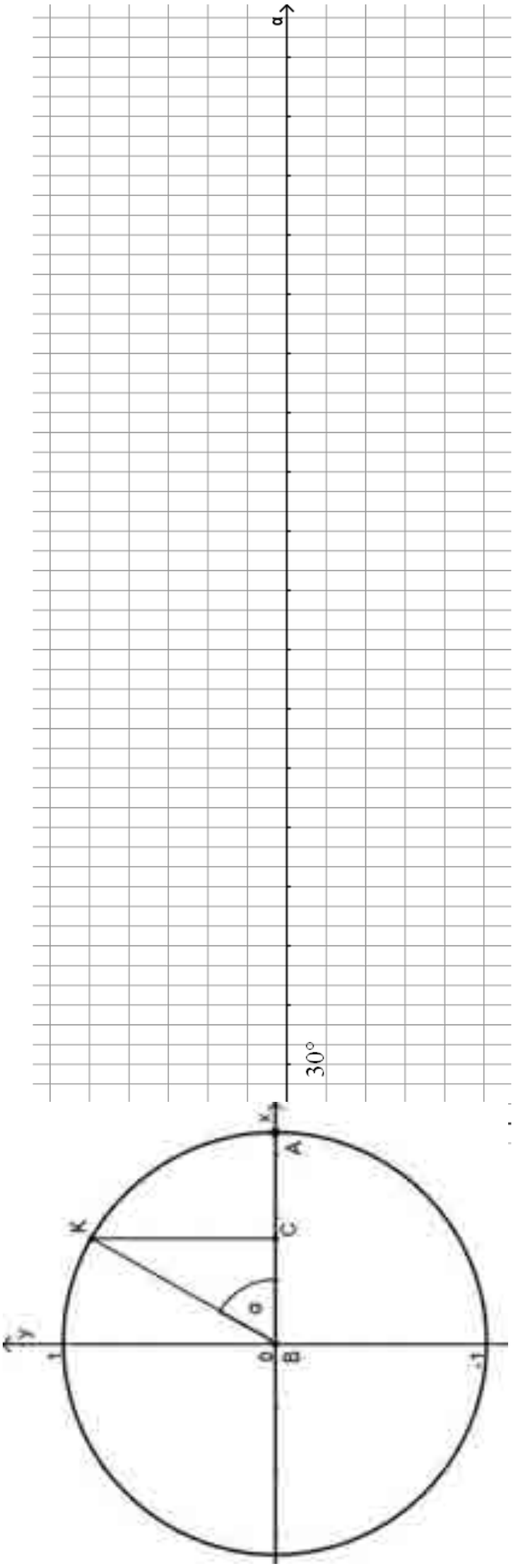
Mitternachtssonne



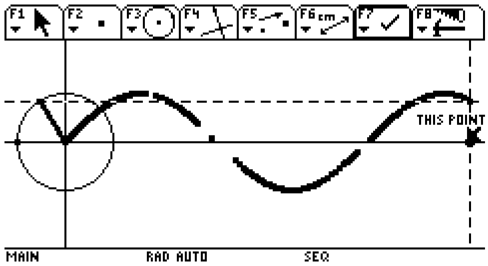
EKG

LM 1.2

Käferfrau Karla



LM 1.3

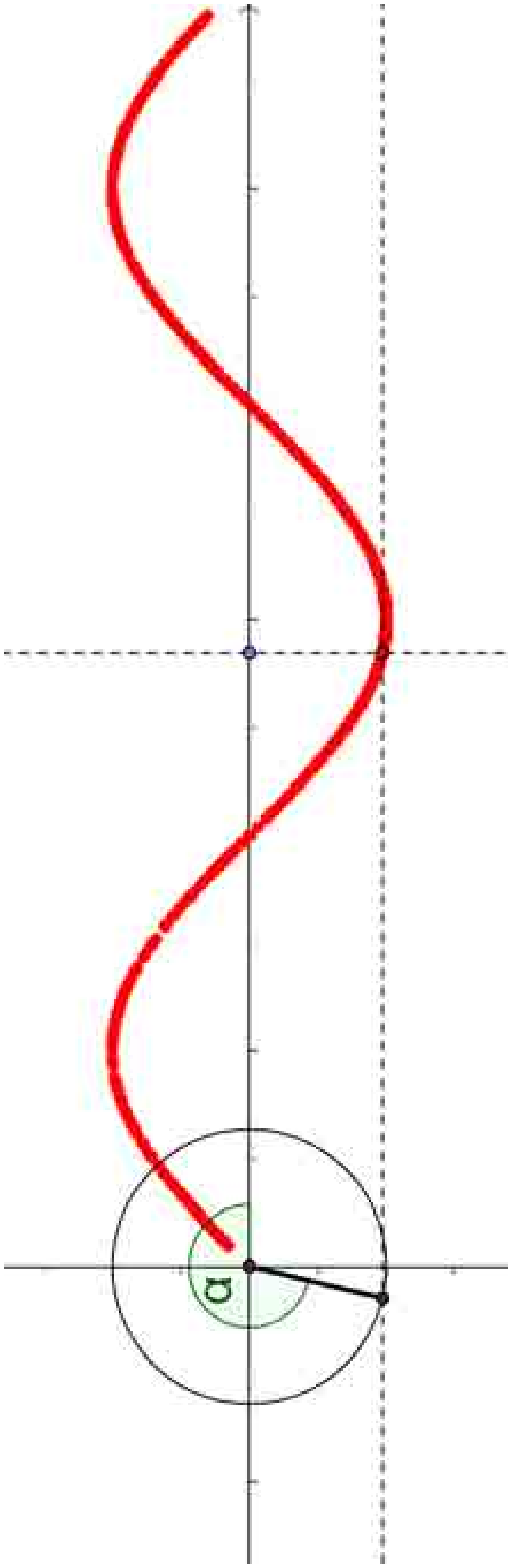


Anleitung zur Datei ‚main.sinus.v2a'

Um ein Bild mit dem Graphen der Sinusfunktion zu erhalten, muss nach Aufruf der Datei folgendes geschehen:

1. mit „F7 – Trace on" den Spurmodus aktivieren.
2. Den Schnittpunkt der beiden gestrichelten Geraden markieren.
3. Mit „lock" den fetten Punkt greifen, halten und mit dem Cursor ziehen.

LM 1.4



Thema 2: Einführung der Sinusfunktion	Dauer: 4 Stunden
Die trigonometrischen Funktionen sind bislang nur als Längenverhältnisse in rechtwinkligen Dreiecken bekannt. In diesem Kapitel soll der Zusammenhang zwischen Winkel und Sinus des Winkels als Funktion neu aufgefasst werden. Dazu wird die Sinus- und die Kosinusfunktion durch Projektion am Einheitskreis und Bezugnahme auf die Längenverhältnisse im rechtwinkligen Dreieck eingeführt. Im nächsten Schritt wird das Bogenmaß definiert. Anschließend werden Symmetrieeigenschaften und Phasenverschiebungen untersucht.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 1.4; LM 2.1 SM 2.1 bis 2.3	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe: Es soll die Phasenverschiebung der Graphen herausgestellt werden.		Die Verbindung zwischen der Sinus- und der Kosinuskurve wird später vertieft.
Erarbeitung: Die Schüler bearbeiten den Teil a) der Aufgabe 1. Dabei stellen sie den Bezug zum Sinus als Längenverhältnis im rechtwinkligen Dreieck her und berechnen Werte für den Sinus ausgewählter Winkelgrößen.	SM 2.1, Aufg. 1 a	.
Sicherung: Definition der Sinusfunktion Der Verlauf des Graphen, die Periodizität und einige Funktions-werte werden besprochen.	LM 1.4	Die Schüler machen sich mit dem Verlauf und den Eigenschaften des Graphen vertraut und lernen einige wichtige Funktionswerte kennen.
Hausaufgabe: Aufgabe 1b	SM 2.1, Aufg. 1 b	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe Einführung der Kosinusfunktion Wiederholung der markanten Wertepaare der Sinus- und Kosinus-funktion	 SM 2.1	 Abfrage in beiden Richtungen
Information (Einführung des Bogenmaßes): • Motivation durch vergleichbare Längeneinheiten auf x- und y-Achse. • Abwicklung des Einheitskreises (= Bogenlänge) • Bezugnahme auf den Umfang eines Kreises • Bogenlänge im Einheitskreis (= Bogenmaß) über Dreisatz/ Proportionalität/Verhältnisgleichung • Umschalten beim TC zwischen Gradmaß (DEG) und Bogenmaß (RAD)		 Lehrervortrag
Übungen: 1) Ergänzung der Achsenbeschriftung im Bogenmaß durch Vielfache von π. 2) Umrechenübung (**Kopfaufgaben**) mit π für einfache Winkel (Vielfache von 30° und 45°) (Aufgabe 2) 3) Umrechenübung (TC-Nutzung) für beliebige Winkel (auch Dezimalnäherungen) (Aufgabe 3) 4) Als Möglichkeit zur Binnendifferenzierung zusätzlich: Welcher funktionale Zusammenhang besteht zwischen Winkel im Grad- und im Bogenmaß?	 SM 1.3 Aufg. 6 SM 2.1 Aufg. 2, 3	 Umrechnungen jeweils in beiden Richtungen Hier ist ein linearer Zusammenhang zu entdecken.
Hausaufgabe: Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten das SM 2.2.	 SM 2.2	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der Hausaufgabe: Zusammenstellung der Eigenschaften der Sinusfunktion und der Kosinusfunktion im Vergleich Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte des Funktionsgraphen.	LM 2.1 (Folie) SM 2.3	Ergebnissicherung
Erarbeitung: Grafische Lösung von Sinusgleichungen und Begründung der Vielfachheit von Lösungen.	SM 2.3 Aufg. 4	
Kopfrechentest	LM 7.	
Erarbeitung: Die Schüler bearbeiten Aufgabe 5 und lernen die Notation des TC zur allgemeinen Lösung der Gleichung des Typs sin(x) = a kennen. In der anschließenden Besprechung wird die Notation der allgemeinen Lösung exemplarisch eingeführt.	SM 2.3 Aufg. 5	Aufgabenteil 5b) kann im Sinne der inneren Differenzierung genutzt werden.
Übung: Anhand der Aufgabe 6 wird geübt.	SM 2.3 Aufg. 6	
Hausaufgabe: Entfällt		

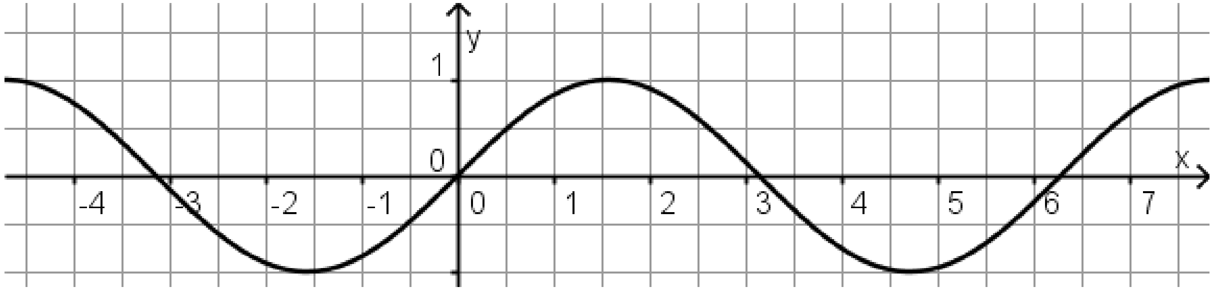
Ablauf der Stunde 4:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Wiederholung des Zusammenhangs zwischen den Graphen der Sinus- und Kosinusfunktion – Erläuterung der Phasenverschiebung anhand der beiden Graphen und rechnerische Verdeutlichung mit Hilfe des TC	SM 2.2 LM 2.1	
Übung: Zur Übung und Vertiefung können die Aufgaben 7 - 9 bearbeitet werden. Dazu ist eine entsprechende Auswahl zu treffen.	SM 2.3. Aufg. 7 - 9	
Optionale Hausaufgabe: Lernprotokoll 1 Die Schüler können anhand vorgegebener Aufgaben ihren Wissensstand überprüfen.	SM Selbstein- schätzung	

LM 2.1

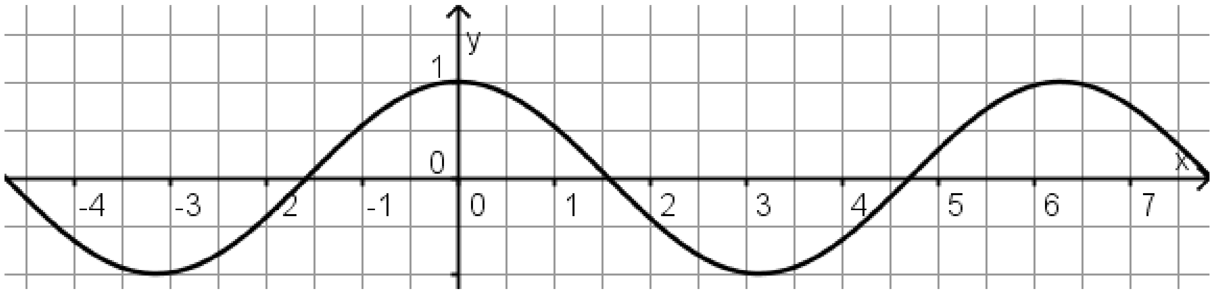
Übersicht: Eigenschaften der Sinus- und Kosinus-Funktion

Sinus-Funktion



	Bogenmaß	Gradmaß
Nullstellen		
Hochpunkte		
Tiefpunkte		
Symmetrie		

Kosinus-Funktion



Der Graph der Kosinusfunktion entsteht durch eine Verschiebung des Graphen der Sinusfunktion um _______________ bzw. _____________ nach links.

Damit sind auch die Nullstellen, Hoch- und Tiefpunkte entsprechend verschoben.

Symmetrie	

Thema 3: Parametervariation und Modellieren mit Sinusfunktionen	**Dauer:** 7 Stunden
Die Sinusfunktion soll in diesem Kapitel angepasst werden, um periodische Prozesse zu beschreiben. Dabei wird über eine schrittweise Veränderung im „Funktionenlabor“ ein Term der Form $a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$ entwickelt und die Bedeutung der einzelnen Parameter verständlich gemacht. Auf die Nutzung der Kosinusfunktion wird hier verzichtet. Anschließend wird auch die Regression mithilfe der Sinusfunktion genutzt und kritisch bewertet.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 3.1 bis 3.9; Ordner Daten (Versuch 1: wand0; mx1; my1. Versuch 2: wand; kx; ky)	

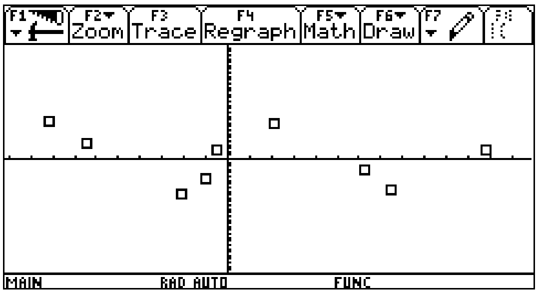
Ablauf der Stunde 1:

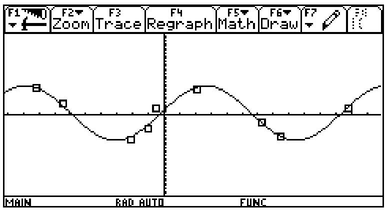
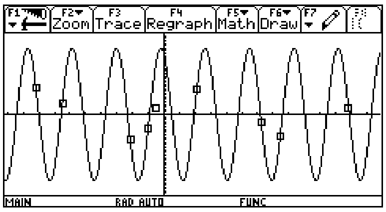
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Orientierung: Die Sinusfunktion soll genutzt werden, um periodische Prozesse zu beschreiben. Dazu muss der Funktionsterm verändert werden. Dies soll schrittweise mit einem „Funktionenlabor“ erfolgen.		Lehrerinformation
Erarbeitung: Die Schüler bearbeiten Aufgabe 1 und benennen die durch die einzelnen Parameter bewirkten Veränderungen im Graphen.	SM 3.1 Aufg. 1	Partnerarbeit
Ergebnissicherung: Bei dem Graphen zu $y = a \cdot \sin(b \cdot (x-c)) + d$ verändern die Parameter a, b, c, d den Graphen der Sinusfunktion wie folgt: a: Streckung in y-Richtung um den Faktor a b: Streckung in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{b}$ c: Verschiebung in x-Richtung um c d: Verschiebung in y-Richtung um d		Hier sollte ein Bezug zu dem schon bekannten Begriff Amplitude hergestellt werden: a = Amplitude
Vertiefung: Im Unterrichtsgespräch wird die Aufgabe 2 besprochen. Die Schüler sollen zwei mögliche Darstellungen kennen lernen und ineinander überführen können: $c_2 = b \cdot c_1$	SM 3.1 Aufg. 2	
Hausaufgabe: Aufgabe 3 a und b	SM 3.2 Aufg. 3	Vorbereitend für die nächste Stunde

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe Lösung: $y = 5 \cdot \sin(2 \cdot x) + 1$	SM 3.2 Aufg. 3	
Sicherung: Die Strategie zur Bestimmung der Parameter wird gesichert. Im Zusammenhang mit der Hausaufgabe erfolgt die Sicherung hier zunächst nur für d, a und b		Sicherung der Wirkung der Parameter im Wissensspeicher
Übung: Aufgabe 4 dient zum Üben durch Variation der Parameter.	SM 3.2 Aufg. 4	
Vertiefung: Am Beispiel der Aufgabe 3 c wird das Regressionswerkzeug des TC für trigonometrische Funktionen eingeführt. Dabei wird die Äquivalenz der Terme $a \cdot \sin(b(x-c_1))+d$ und $a \cdot \sin(bx-c_2)+d$ untersucht und nachgewiesen.	SM 3.2 Aufg. 3 c	
Hausaufgabe: Aufgabe 5	SM 3.2	Übung und kritische Reflexion zur Regression

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe Es soll in der Aufgabe 5 c erkannt werden, dass die Regression bei trigonometrischen Funktionen nicht zu eindeutigen Ergebnissen führt.	SM 3.2	Diese Erkenntnisse werden in den Aufgaben 10 (SM 3.6) und 12 (SM 3.7) aufgegriffen.
Datenplot: 		

Regressionsfunktion:  **andere Funktion:**  Durch die Punkte des Plots können ganz unterschiedliche Funktionsgraphen führen. Nur im Sachzusammenhang lässt sich entscheiden, welche zugehörige Funktion richtig ist.		
Erarbeitung: Die Schüler bearbeiten Aufgabe 6. Dabei werden sie nach händischer Bestimmung der Parameter folgende Lösung erhalten: $y = 2 \cdot \sin(0{,}8 \cdot (x-2)) + 2$. Die Regression liefert: $y = 2 \cdot \sin(0{,}8 \cdot x - 1{,}4) + 1{,}9$. Beim Vergleich sollen die Abweichungen thematisiert, dann noch einmal die beiden Termvarianten besprochen und deren Bedeutung am Graphen verdeutlicht werden.	SM 3.3	Ich-Du-Wir-Methode
Zusammenfassung: Die erarbeiteten Ergebnisse und Strategien werden anhand des Wissensspeichers noch einmal zusammengefasst.	Wissens- speicher	

Ablauf der Stunde 4 und 5:

Inhalt	Medien	Kommentar
Übung: Übung zur Parameterbestimmung und Anwendung der Regression an vielfältigen Beispielen (Aufgaben 7 – 12)	SM 3.3 – 3.7	Gruppenarbeit: Die Schüler suchen sich Aufgaben nach eigenem Leistungsprofil

Ablauf der Stunde 6:

Präsentation und Besprechung der Ergebnisse	SM 3.3 – 3.7	Je nach Zeit und Wunsch kann hier auf Plakaten oder am OHP präsentiert werden.

Ablauf der Stunde 7:

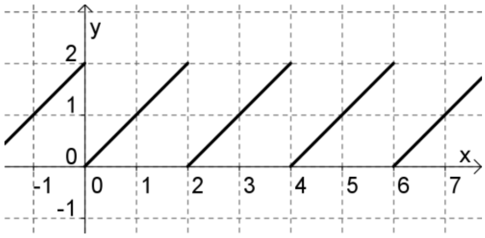
Einstieg: Die Schüler stellen bei der Bearbeitung fest, dass das Regressionsmodul den Sachzusammenhang nicht richtig beschreibt. Die Parameter der Funktion werden nicht sachgerecht bestimmt.	SM 3.7 Aufg.13	
Reflexion: Die Parameter der Funktion können im Sachzusammenhang bestimmt werden. Dazu sind begründete Annahmen z. B zur Periodenlänge zu machen.		Das Beachten der Problematik des trigonometrischen Regressionsmoduls führt dazu, dieses deshalb nur reflektiert zu nutzen.
Zusammenfassende Modellierungsaufgabe: Wie der Screenshot in der Aufgabe zeigt, gibt der Voyage auch bei sin-Eingaben nach Termberechnungen teilweise cos-Ausgaben zurück. Dieser Term muss dann mit dem entsprechenden sin-Term verglichen werden.	SM 3.8 Aufg. 14	
Optionale Hausaufgabe: Lernprotokoll 2 Die Schüler können anhand vorgegebener Aufgaben ihren Wissensstand überprüfen.	SM Selbstein- schätzung	

Ablauf der Stunde 8: (Optional)

Experiment: Mithilfe des CBR kann die Bewegung eines Fadenpendels untersucht werden. Dabei werden Daten der Bewegung aufgenommen und in Listen gespeichert. Diese Daten können ausgewertet werden. Die Daten befinden sich im Ordner Daten (Versuch 1: wand0; mx1; my1. Versuch 2: wand; kx; ky) und können somit auch ohne Durchführung des Experiments ausgewertet werden.	SM 3.9 Aufg.15 CBR	
Reflexion: Beim Versuch, die Daten durch eine periodische Funktion zu beschreiben, treten Probleme auf. Der zweite Datensatz führt in der Regel zu einem Fehler bei der Erstellung der Regressionsfunktion. Das Regressionsmodul arbeitet fehlerhaft, da bei kleinen Unregelmäßigkeiten im Datensatz die Periode nicht erkannt wird.		In diesem Fall stammen die Unregelmäßigkeiten von fehlerhaften Reflektionen bei der CBR-Messung. Vgl. auch Aufg. 13.

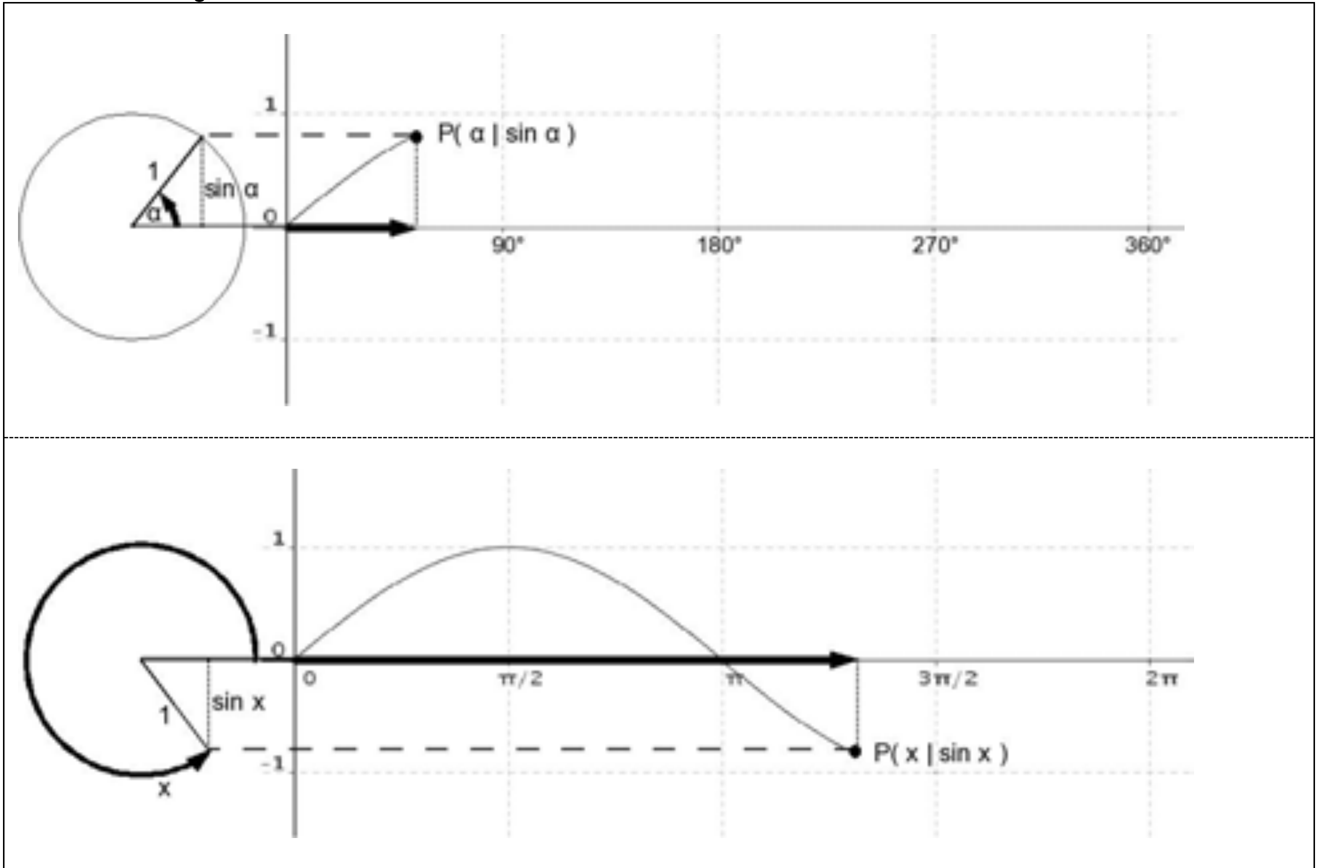
4. Wissensspeicher

Eine Funktion f heißt **periodisch**, wenn es eine von null verschiedene Zahl p gibt, so dass $f(x+p)=f(x)$.
Die kleinste positive Zahl p mit dieser Eigenschaft heißt **Periode** von f.
Die Sinusfunktion ist periodisch mit Periode 2π.



$p=2$

Die Entwicklung am Einheitskreis:



Ein Winkel α kann nicht nur im **Gradmaß**, sondern auch im Bogenmaß gemessen werden.
Das **Bogenmaß** von α ist die Bogenlänge des zu α gehörigen Bogens a auf dem Einheitskreis.

Gradmaß und Bogenmaß sind zueinander proportional: $\frac{\text{Bogenmaß}}{2\pi}=\frac{\text{Gradmaß}}{360°}$.

Wichtige, häufig benutzt Werte der Sinusfunktion:

x im Gradmaß	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
x im Bogenmaß	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin(x)	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}$	$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}$	1	0	-1	0

Bei dem Graphen zu $y = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$ bewirken die Parameter a, b, c, d bezüglich des Graphen der Sinusfunktion Folgendes:

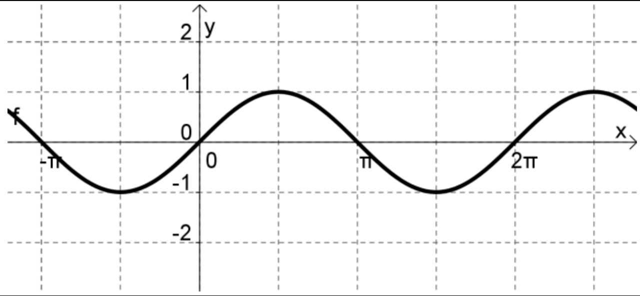
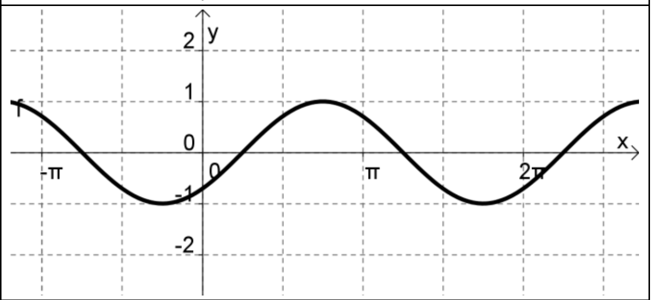
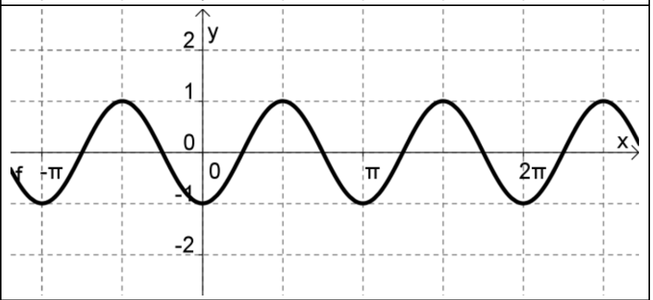
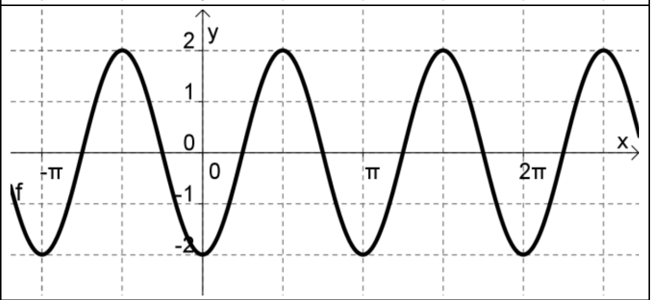
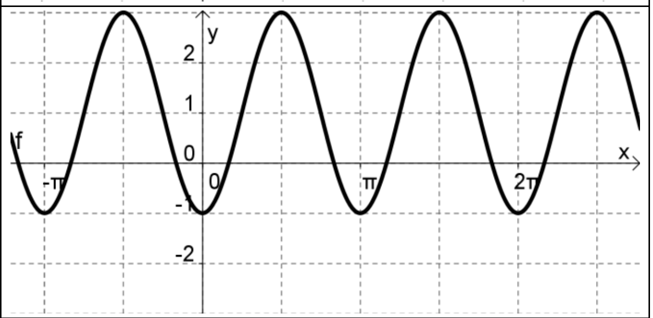
a: Streckung in y-Richtung um den Faktor a

b: Streckung in x-Richtung um den Faktor 1/b

c: Verschiebung in x-Richtung um (c)

d: Verschiebung in y-Richtung um d

Beispielsweise entsteht der Graph der Funktion f mit $f(x) = 2 \cdot \sin\left(2 \cdot \left(x - \frac{\pi}{4}\right)\right) + 1$ wie folgt:

• Ausgangsgraph	
• Verschieben in x-Richtung um $\frac{\pi}{4}$	
• Strecken in x-Richtung um den Faktor $\frac{1}{2}$	
• Strecken in y-Richtung um den Faktor 2	
• Verschieben in y-Richtung um 1	
Die Amplitude (die höchste Auslenkung) beträgt a und die Länge der Periode ist $\frac{2\pi}{b}$.	

Bestimmung der Parameter zur Modellierung eines Datensatzes:

(1) Bestimmung der Nulllage (Verschiebung in y-Richtung): $d = \frac{y_{max} + y_{min}}{2}$

(2) Bestimmung der Amplitude: $a = \frac{y_{max} - y_{min}}{2}$

(3) Periodenlänge ablesen: b

(4) Verschiebung in x-Richtung: c

5. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	**ich bin sicher**	**ich muss noch üben**	**ich brauche Hilfe**
• einen periodischen Prozess als Funktion verstehen, grafisch darstellen und die Periodenlänge bestimmen. (Vgl. Aufgabe 1)			
• den Zusammenhang zwischen dem Graphen der Sinusfunktion f mit $f(x)=\sin(x)$ und dem Einheitskreis erläutern.			
• erklären, wie Grad- und Bogenmaß zusammenhängen.			
• Gradmaße in Bogenmaße umrechnen und umgekehrt (für besondere Werte auch ohne TC). Beispiele: Rechne in das jeweils andere Winkelmaß um: 45°, 247°, 2π, 4,2 .			
• zu gegebenen Werten von x die zugeordneten Werte sin(x) angeben (für besondere x auch ohne TC). Beispiele: sin(0°), sin(90°), $\sin\left(\frac{3}{2}\pi\right)$, sin(25,3)			
• zu gegebenen Werten von x die zugeordneten Werte sin(x) aus dem Graphen oder mithilfe des Einheitskreises bestimmen.			
• zu gegebenen Werten sin(x) zugehörige Werte für x aus dem Graphen oder mithilfe des Einheitskreises bestimmen. (Vgl. Aufgabe 2)			
• zu gegebenen Werten sin(x) alle zugehörigen Werte für x angeben (für besondere sin(x) auch ohne TC). (Vgl. Aufgabe 3)			
• zu gegebenen Graphen passende Funktionsterme angeben: $f(x)=a\cdot\sin(x)$, $f(x)=\sin(b\cdot x)$, $f(x)=\sin(x-c)$. (Vgl. Aufgabe 4)			
• Graphen von Funktionen der Form (auch ohne TC) $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x-c))+d$ skizzieren. Beispiel: Skizziere den Graphen zu $f(x)=3\cdot\sin(2(x-\pi))+1$.			
• aus einem gegebenen Graphen die Parameter a, b, c und d ablesen.			
• die Periodenlänge und die Amplitude a von Funktionen der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x+c))+d$ angeben. Beispiel: Bestimme die Amplitude und Periodenlänge zu $f(x)=4\cdot\sin\left(2\cdot\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right)-2$.			
• zu gegebenen periodischen Verläufen eine gute Modellierungsfunktion der Form $f(x)=a\cdot\sin(b\cdot(x-c))+d$ ermitteln. (Vgl. Aufgabe 5)			

Aufgaben zur Selbsteinschätzung

Aufgabe 1

Die Fahrt mit einer Achterbahn über mehrere Runden hintereinander ist ein periodischer Vorgang. Peter fährt zwei Runden und ist nach 3 Minuten und 50 Sekunden wieder am Start.

a) Zwischen welchen Größen kann hier eine Zuordnung vorgenommen werden?
Gib die Länge der Periode an.

b) Beschreibe eine Fahrt in Worten und zeichne den Graphen.

Aufgabe 2

a) Lies die Werte $\sin(0)$, $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$, $\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$, $\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)$ aus dem Graphen und am Einheitskreis ab.

b) Bestimme durch Ablesen am Graphen und am Einheitskreis mögliche x-Werte zu $\sin(x) = 0{,}75$ und $\sin(x) = -1$.

Aufgabe 3

a) Nenne einige Lösungen und gib anschließend einen geschlossenen Ausdruck für alle Lösungen ohne Benutzung des TC an für $\sin(x) = 1$, $\sin(x) = 0$.

b) Bestimme alle Lösungen mithilfe des TC für $\sin(x) = 0{,}78$.

Aufgabe 4

In Paris hat man ab April 2001 über mehrere Jahre die Stunden mit Tageslicht notiert. Hierbei hat man die Tageslichtstundenanzahl L in Abhängigkeit von der Anzahl der vergangenen Tage t gemessen.

t	0	92	272	364	457	728	910	1004
L	14	19	9	14	19	14	14	9

6. Kopfrechentest

Übung zu Gradmaß – Bogenmaß und Sinus **NAME:**

Aufgabe 1:

Rechne in die jeweils andere Einheit um:

Grad	120°			30°	75°		450°
Bogen		$\frac{\pi}{4}$	$2\cdot\pi$			$\frac{5\pi}{2}$	

Aufgabe 2:

Fülle die leeren Felder aus ohne den Rechner zu verwenden:

sin (90°)	sin(1,5π)			sin(5π)		sin(150°)	$\sin(\frac{\pi}{6})$
		$=-1$	$=0$		$=0{,}5$		

Aufgabe 3:

Kreuze alle richtigen Aussagen an:

- Der Winkel 90° entspricht einem Bogen von $\frac{\pi}{2}$,
  weil das die Länge des Kreisbogens für den 4. Teil eines Kreises ist.
- Die Maßzahl im Bogenmaß ist proportional zur Maßzahl des Winkels.
- Der Sinus des Winkels ist proportional zum Winkel im Bogenmaß.
- Der Quotient aus dem Winkel im Gradmaß und dem Winkel im Bogenmaß ist π.
- Der Quotient aus dem Winkel im Gradmaß und dem Winkel im Bogenmaß ist $\frac{\pi}{360°}$.
- Der Quotient aus dem Winkel im Gradmaß und dem Winkel im Bogenmaß ist $\frac{180°}{\pi}$.

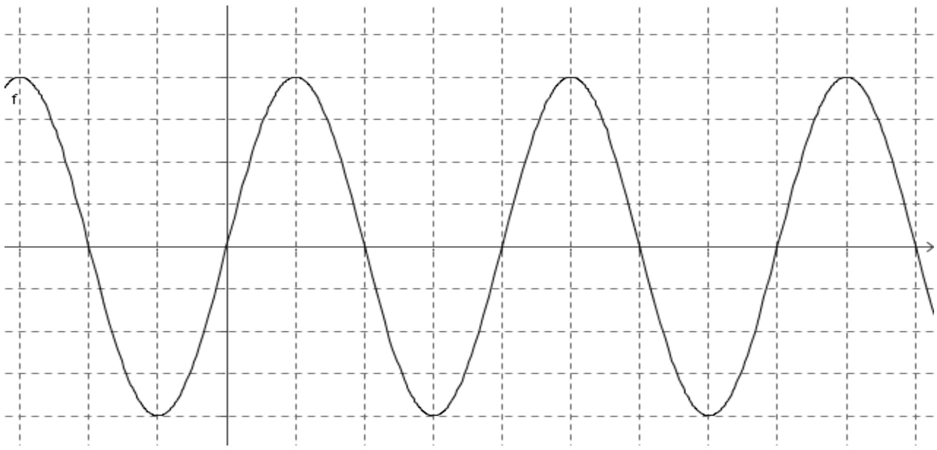
Aufgabe 4:

Welche der folgenden Umformungsformeln beschreiben die Umrechnung vom Bogenmaß ins Winkelmaß?

- $\alpha = \frac{\pi}{180°}\cdot x$
- $\alpha = \frac{360°}{2\pi}\cdot x$
- $\alpha = \frac{180°}{\pi\cdot x}$
- $\alpha = \frac{180°}{\pi}\cdot x$

Aufgabe 5:

Der Graph zeigt die Sinusfunktion. Markiere mindestens 4 Winkel sowohl im Bogenmaß als auch im Winkelmaß:



7. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1

Bestimme alle Winkelgrößen im Bogenmaß, die die Gleichung lösen. Runde auf Zehntel.

a) $\sin(x) = 1$

b) $\sin(x) = -0{,}72$

Aufgabe 2

Von einer Sinusfunktion ist dieser Steckbrief gegeben:

a) Zeichne ihren Graphen.
b) Gib die Funktionsgleichung an.

Der Graph geht durch den Punkt (0/0)
Die y-Werte liegen zwischen -2 und 4
und die erste positive Nullstelle ist π.

Aufgabe 3

Der Kammerton a hat eine Frequenz von 440 Hertz (das bedeutet: die Schwingung wiederholt sich in einer Sekunde 440 mal) und eine Amplitude von 10.

a) Gib eine Sinusfunktion an, die diesen Ton beschreibt.
b) Wie verändert sich die Funktionsgleichung, wenn eine Phasenverschiebung um eine halbe Periode nach links stattfindet?

Aufgabe 4

Die Anzahl der Personen, die in einem Ferienzentrum arbeiten, kann mit der Funktion

$$f(x) = 2 \cdot \sin(\frac{\pi x}{3} + 1) + 2{,}5$$

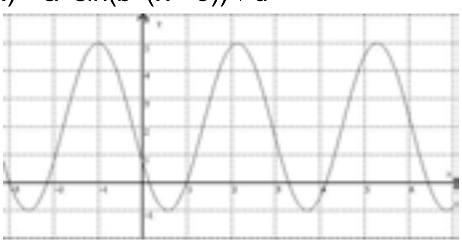
modelliert werden. x bezeichnet dabei die Nummer des Monats (Januar = 1) und f(x) ist die Anzahl der Personen (in Hunderten), die in dem Zentrum in diesem Monat arbeiten.

a) Wann ist die Hauptsaison in diesem Zentrum? Begründe Deine Aussage.
b) Wie viele Personen arbeiten in etwa ständig in dem Zentrum?
c) Wie viele Personen arbeiten im April?
d) Finde alle Monate, in denen nur ungefähr 250 Personen im Zentrum arbeiten.
e) Ein ganzjährig geöffneter Freizeitpark in dem Ferienzentrum wird geschlossen.
Auf welche Parameter in der Modellfunktion wirkt sich dies aus und wie?

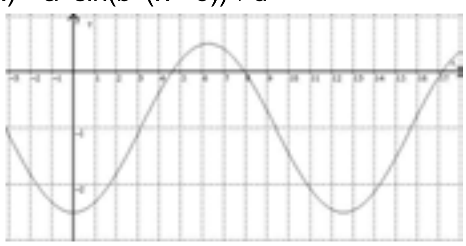
Aufgabe 5

Gib die Parameter a, b, c und d in den Funktionsgleichungen für die beiden Graphen an.

a) $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$



b) $f(x) = a \cdot \sin(b \cdot (x - c)) + d$



Aufgabe 6

a) Pit behauptet: “Wenn zwei Winkel den gleichen Sinuswert haben, dann brauche ich nur 180° addieren und erhalten wieder den selben Sinuswert.“ Hat er Recht? Begründe Deine Aussage.

b) Gilt $\sin(-x) = -\sin(x)$? Begründe Deine Aussage.

Aufgabe 7

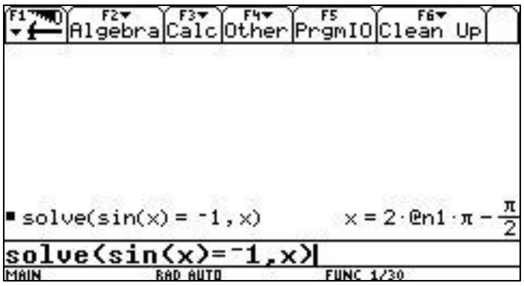
a) Erläutere anhand einer Grafik, dass die Gleichung sin(x) = -1 unendlich viele Lösungen hat.

b) Erläutere anhand Deiner Grafik aus a) die Anzeige im Fenster des TC.

c) Ein anderer Rechner gibt als Lösung

$x = 2@n2 \cdot \pi + \frac{3\pi}{2}$ an.

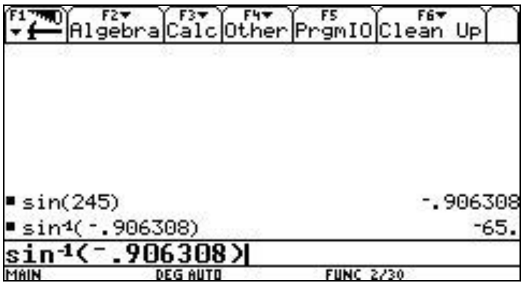
Ist diese Lösung auch richtig? Begründe.



Aufgabe 8

a) Rechts wurde mit einem TC der Sinuswert eines Winkels bestimmt und anschließend die zu diesem Sinuswert gehörende Winkelgröße berechnet. Nimm dazu Stellung.

b) Der Sinus der Winkelgröße 4,1737 im Bogenmaß ergibt bei vergleichbarer Rechnung -0,8584. Gib eine weitere Winkelgröße im Bogenmaß an, deren Sinus ebenfalls -0,8584 ergibt.



Aufgabe 9

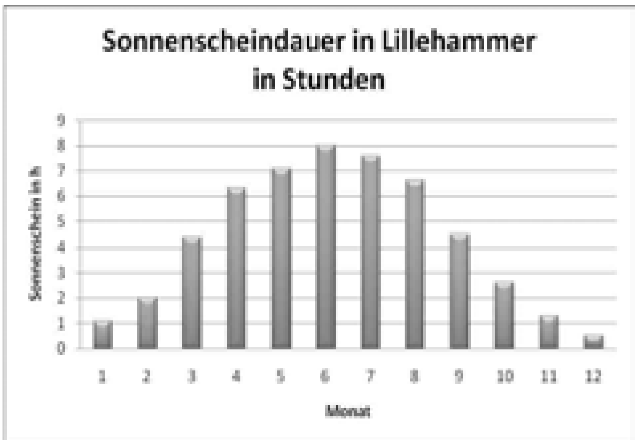
Durch $f(x) = \sin(b \cdot x)$ ist eine Sinusfunktion gegeben.
Bestimme b so, dass gilt:

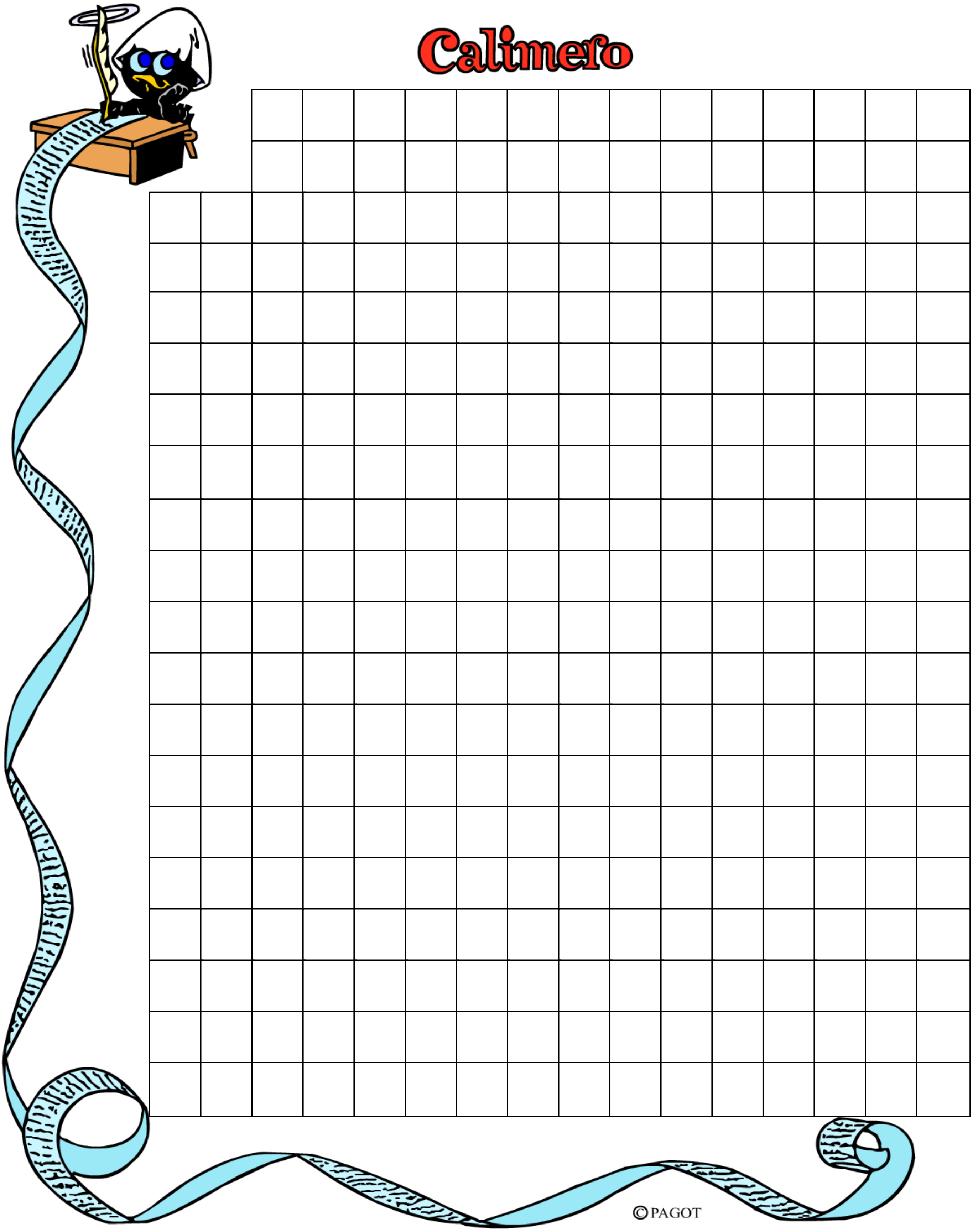
a) die kleinste Periode ist $\frac{\pi}{2}$;

b) der Graph der Funktion geht durch den Punkt $P\left(\frac{\pi}{6} \mid \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$

Aufgabe 10

Gib eine allgemeine Sinusfunktion an, die die mittlere Sonnenscheindauer in Lillehammer möglichst gut beschreibt.
Begründe dabei deine Wahl der einzelnen Parameter.




Calimero
©PAGOT

C A l i M E R O

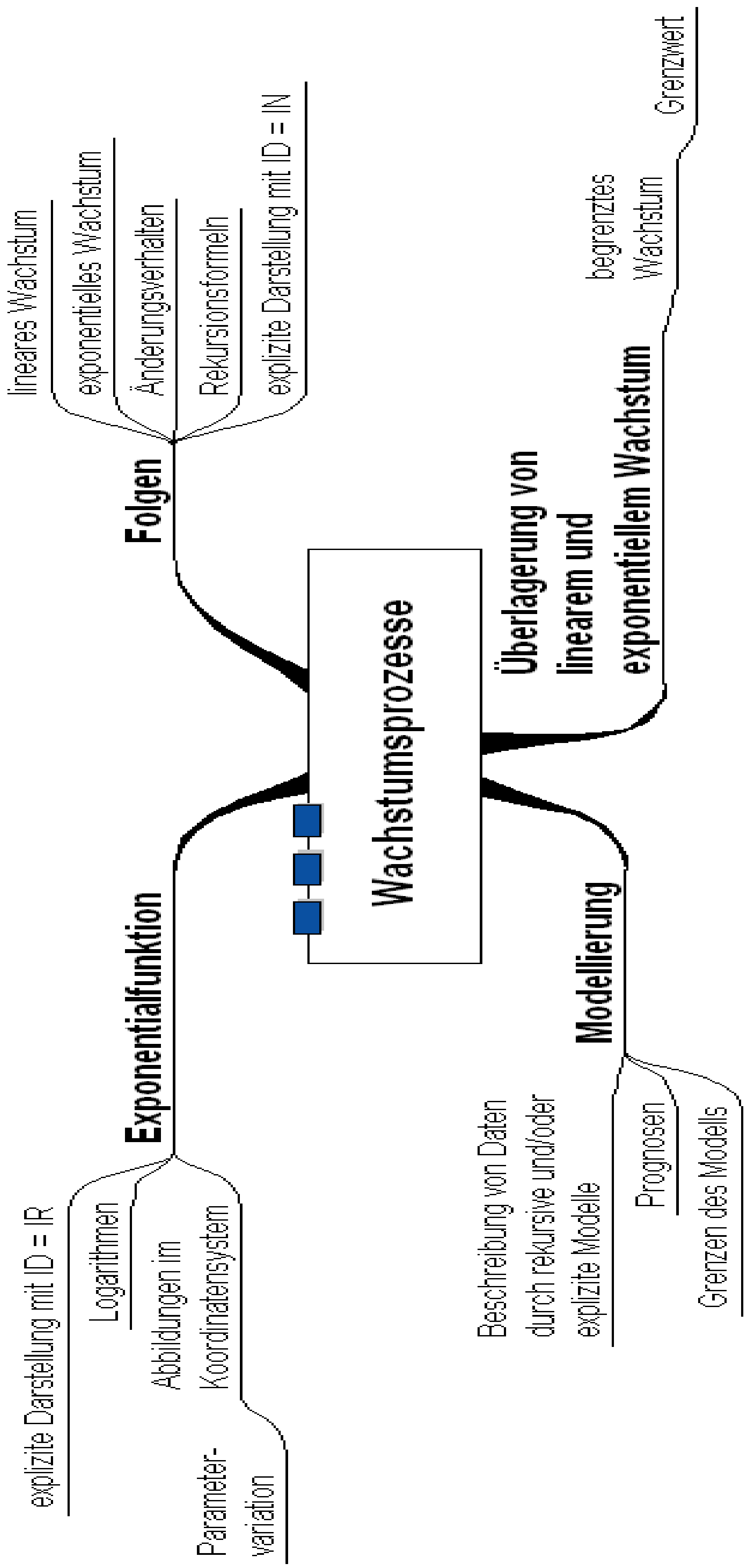
Computer-Algebra im Mathematikunterricht
Entdecken, Rechnen, Organisieren

Wachstumsprozesse

L e h r e r m a t e r i a l i e n

Überblick über den Unterrichtsverlauf

Mind Map


Wachstumsprozesse
Folgen
lineares Wachstum
exponentielles Wachstum
Änderungsverhalten
Rekursionsformeln
explizite Darstellung mit ID = IN
Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum
begrenztes Wachstum
Grenzwert
Exponentialfunktion
explizite Darstellung mit ID = IR
Logarithmen
Abbildungen im Koordinatensystem
Parameter-variation
Modellierung
Beschreibung von Daten durch rekursive und/oder explizite Modelle
Prognosen
Grenzen des Modells

Prozessbezogene Kompetenzen

Anhand dieses Unterrichtsmaterials können bei entsprechender methodischer Umsetzung folgende prozessbezogenen Kompetenzen des Kerncurriculums von den Schülerinnen und Schülern schwerpunktmäßig erworben werden:

Mathematisch argumentieren	**Probleme mathematisch lösen**	**Mathematisch modellieren**	**Mathematische Darstellungen verwenden**	**Mit symbolischen, formalen, …**	**kommunizieren**
• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache • kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren • bauen mehrschrittige Argumentationsketten auf, analysieren und bewerten diese • geben Begründungen an, überprüfen und bewerten diese	• stellen sich inner- und außermathematische Probleme und beschaffen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen • wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese an	• wählen, variieren und verknüpfen Modelle zur Beschreibung von Realsituationen • verwenden Rekursionen zur Ermittlung von Lösungen im mathematischen Modell • analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Realsituation	• stellen rekursive Zusammenhänge dar, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners, interpretieren und nutzen solche Darstellungen	• nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge • formen Terme um, ggf. auch mit einem Computer-Algebra-System • wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen • nutzen eine Tabellenkalkulation und ein CAS-System zur Darstellung und Erkundung mathematischer Zusammenhänge sowie zur Bestimmung von Ergebnissen	• teilen ihre Überlegungen anderen verständlich mit, wobei sie vornehmlich die Fachsprache benutzen • präsentieren Prolembearbeitungen, auch unter Verwendung geeigneter Medien • verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein

Inhaltsbezogene Kompetenzen

Mit diesem Unterrichtsmaterial werden folgende inhaltsbezogenen Kompetenzen vermittelt:

Zahlen und Operationen	**Größen und Messen**	**Raum und Form**	**funktionaler Zusammenhang**	**Daten und Zufall**
• lösen Gleichungen in einfachen Fällen algebraisch mithilfe von Umkehroperationen			• erkennen funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen und zwischen Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie • identifizieren und klassifizieren Funktionen in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen • nutzen Potenzfunktionen und Exponentialfunktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners • stellen Funktionen durch Terme und Gleichungen dar und wechseln zwischen den Darstellungen Term, Gleichung, Tabelle, Graph • modellieren Sachsituationen durch Funktionen • wenden die Eigenschaften von Funktionen auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners zur Lösung von Problemen an und bewerten die Lösungen • deuten die Parameter von Exponentialfunktionen in den grafischen Darstellungen und nutzen diese in Anwendungssituationen • führen eine Parametervariation für Funktionen mit $y = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ an Beispielen unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners durch und beschreiben und begründen die Auswirkungen auf den Graphen • bestimmen die Funktionsgleichung aus dem Graphen • grenzen lineares, potentielles und exponentielles Wachstum gegeneinander ab • modellieren lineares und exponentielles Wachstum sowie deren Überlagerung rekursiv auch unter Verwendung des eingeführten Taschenrechners	

Hinweise zu rechnerspezifischen und rechnerfreien Fertigkeiten

Rechnerfreie Fertigkeiten

Obwohl die Einheit „Wachstumsprozesse“ mit Verwendung des TC als Werkzeug unterrichtet wird, sollen bestimmte Fähigkeiten von den Schülerinnen und Schülern auch rechnerfrei erworben und beherrscht werden. Diese Fertigkeiten sollen in Klassenarbeiten oder in Kurztests nachgewiesen bzw. abgeprüft werden. Folgende rechnerfreie Fertigkeiten erscheinen uns relevant:
Die Schülerinnen und Schüler sollen:

1. für einfache lineare und exponentielle Wachstumsvorgänge Rekursionsformeln und explizite Formeln finden und weitere Folgenglieder berechnen können.
2. für begrenzte Wachstumsvorgänge die Rekursionsformel aufstellen können.
3. Wachstumsvorgänge durch ihre Änderung charakterisieren und durch geeignete Modelle beschreiben.
4. zu einer gegebenen Exponentialfunktion den zugehörigen Graphen skizzieren können und zu einem gegebenen Graphen den zugehörigen Term nennen.
5. Graphen exponentieller Funktionen erkennen und diese von anderen Funktionsgraphen unterscheiden können.
6. Terme der Form $a \cdot b^{cx+d}$ auf Terme der Form $a \cdot b^x$ vereinfachen.
7. die Logarithmenschreibweise für die Lösung einer Exponentialgleichungen verwenden und den Wert einfacher Logarithmen angeben.
8. Exponentialgleichungen in einfachen Fällen exakt lösen bzw. die Größenordnung der Lösung angeben können.

CAS-Fertigkeiten

Im Umgang mit dem TC sollen die Schüler am Ende der Einheit über folgende Fertigkeiten verfügen:

1. Folgendefinitionen im sequence-mode eingeben können.
2. Neues Window-Menü für Folgen einstellen können.
3. Tabelle und Graph zur Bestimmung von Lösungen nutzen können.
4. Untersuchungen von Funktionsgraphen mit Parametervariation durchführen können.

Thema 1: Lineares und exponentielles Wachstum	**Dauer:** 10 Stunden
Einführung in Wachstumsprobleme über ein Spiel. Rekursive und explizite Darstellung von Wachstumsprozessen. Charakterisierung von Funktionen durch Änderungen (Differenzen/Quotienten). Modellierung des Änderungsverhaltens.	
Besondere Materialien/Technologie: Holzchips, Münzen oder m&m's SM 1.1 bis 1.7	

Ablauf der Stunden 1 bis 3

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Vorstellung des Spiels Gruppenbildung: ca. 6 Schüler bilden eine Gruppe	Plättchen, Münzen oder m&m's	(ca. 200/Gruppe)
Erarbeitung: Durchführung des Spiels und Bearbeitung von SM 1.1: Das Spiel erzeugt handlungsorientiert unterschiedliche Datensätze, deren Auswertung zur Charakterisierung des exponentiellen Wachstums führen soll. Die Schüler sollen diskutieren sowie aktiviert werden, um auch Fragen zu stellen.	SM 1.1 TC	GA
Präsentation der Ergebnisse und Auswertung: Vergleich und Zusammenführung der Ergebnisse: „Es kommt immer ungefähr die Hälfte dazu." Die grafische Darstellung führt zu der Frage nach einem geeigneten Funktionstyp: Erfahrungsgemäß wird von vielen Schülern hier eine Parabel vorgeschlagen, einige sehen den Wirkzusammenhang („die Hälfte dazu"). Auf jeden Fall beide (oder weitere) Modelle aufnehmen und bzgl. Prognosen vergleichen. Bei der Parabel sinnvolle Kurvenanpassung durchführen (Typ $y = ax^2 + 4$ liegt auf der Hand), verschiedene Parabelgleichungen aufstellen und zeigen, dass die Parabel keine gute Anpassung liefert. Die Frage nach einer geeigneten Funktion muss hier nicht weiter verfolgt werden.	OHP	Präsentation versch. Schülerergebnisse Diskussion im Plenum Für eine gemeinsame Weiterarbeit empfiehlt sich die Einigung auf einen gemeinsamen Datensatz (z. B. Mittelwerte), vor der Suche nach einer geeigneten Parabel.
Zusammenfassung: Als gesicherte Erkenntnis: „Es kommt mit jedem Wurf ca. die Hälfte vom jeweiligen Bestand dazu."		
Einführung einer geeigneten Schreibweise (**Rekursionsformel**): $u(n) = u(n-1) + 0{,}5 \cdot u(n-1)$ und u(0) = 4 Einführung der Begriffe: Folge, Startwert und Folgenglied, Einführung des Rechnerhandlings. Beantwortung der Frage, wann 5000 gleichfarbige Seiten auf dem Tisch liegen, mit TC.		

Vertiefung: Als Variation werden andere Startwerte für das Spiel gewählt: Erstelle eine Tabelle für das Spiel, wenn man mit u(0)=8 beginnt und 10 (20) Runden spielt.		
Übung/Hausaufgabe zwischen den Stunden: Der Umgang mit der Rekursionsformel wird an geeigneten Beispielen geübt. Aufgabe 2 Variationen des Spiels wie in Vertiefung, evtl. Aufgabe 3	SM 1.2 Aufg. 2	Erwartet werden Lösungen mit Tabelle (TC).

Ablauf der Stunden 4 und 5

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Aufgabe zur Weltbevölkerung dient dem unmittelbaren Vergleich von linearem und exponentiellem Wachstum	SM 1.2 Aufg. 4	
Erarbeitung: Partnerarbeit mit folgenden Ergebnissen: a) Pro Schulstunde um $148 \cdot 45 = 6660$ mehr b) $u1(n) = u1(n-1) + 60 \cdot 24 \cdot 365 \cdot 148$ $u1(n) = u1(n-1) + 77.788.800$ c) Artikel A immer gleicher Zuwachs; Artikel B unterschiedlicher Zuwachs d) $u2(n) = u2(n-1) + 0{,}013 \cdot u2(n-1)$ Ergebnis: 6.078.000.000 Differenz: 211.200 Unterschied weniger als 0,004% e) Schüler arbeiten sich unter Verwendung der in der Aufgabe vorgegebenen Hilfe in den Umgang mit dem Rechner im sequence-mode ein; Ergebnisse aus „table“ ablesen. Zum Beispiel für 30 Jahre: Ergebnis nach A: $= 8.333.664.000$ Ergebnis nach B: $\approx 8.839.640.666$ Sinnvoll an dieser Stelle: Schüler entwickeln eine explizite Darstellung $6.000.000.000 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}013 \cdot 1{,}013 \ldots =$ $6.000.000.000 \cdot 1.013^{30} \approx 8.839.640.666$ Differenz: 505.976.666, also ca. ½ Milliarde Menschen Unterschied, also ca. 6,25-mal die Bevölkerungszahl von Deutschland		PA Bei extremer Zeitknappheit kann die UE ohne A1 direkt mit A4 begonnen werden.

<table>
<tr><td colspan="2">Präsentation der Ergebnisse:
Vergleich der Modelle: Formel und Graph
Herausarbeitung der sinnvollen Linearisierung über kleine Zeiträume und der sinnlosen Linearisierung über große Zeiträume.</td><td></td><td>Präsentation
UG</td></tr>
<tr><td colspan="2">mögliche vertiefende Erarbeitung:
Falls die explizite Darstellung nicht anhand des Bevölkerungswachstums erarbeitet worden ist, kann dies in Anknüpfung an die Einstiegsaufgabe anhand der Aufgabe 5 erfolgen.</td><td>SM 1.3
Aufg. 5</td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Sicherung:
Einführung der Begriffe:
lineares Wachstum und exponentielles Wachstum
rekursive und explizite Darstellungen</td><td rowspan="2">Wissens-
speicher</td><td rowspan="2"></td></tr>
<tr><td>Lineares Wachstum:

rekursive Darstellung:
$u(n) = u(n-1) + d; \quad u(0) = ...$

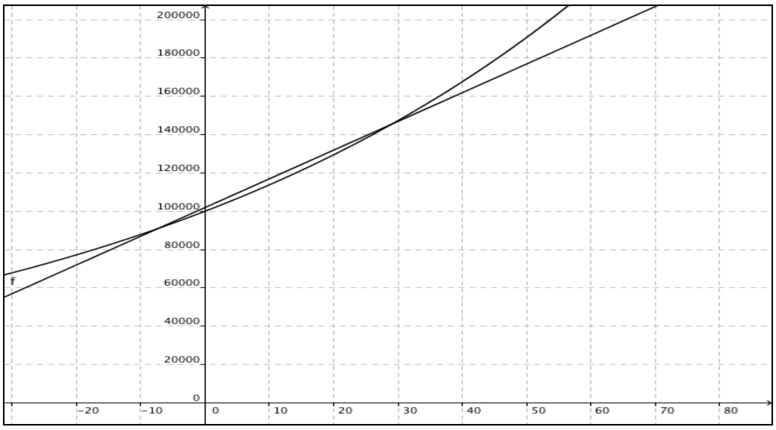
explizite Darstellung:
$u(n) = u(0) + d \cdot n$</td><td>Exponentielles Wachstum:

rekursive Darstellung:
$u(n) = k \cdot u(n-1); \quad u(0) = ...$

explizite Darstellung:
$u(n) = u(0) \cdot k^n$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Vertiefung/ Hausaufgabe:</td><td>SM 1.3
Aufg. 6</td><td></td></tr>
</table>

Ablauf der Stunden 5 und 6

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe: Unterscheidung von Zu- und Abnahmeprozessen hinsichtlich linearem oder exponentiellem Wachstum.	SM 1.3 Aufg. 6	
Übung: Exponentielle Zu-/ Abnahme in verschiedenen Kontexten: In Gruppenarbeit werden 3 verschiedene Beispiele bearbeitet, dabei mindestens ein Zunahme- und ein Abnahmeprozess.	SM 1.4 und 1.5 Aufg. 7 Blanko- folien	GA
Präsentation der Ergebnisse: Eine kurze Präsentation von Ergebnissen (Auswahl) sollte immer wieder beide Darstellungsformen herausstellen und breite Anwendungsbereiche für exponentielle Zu- und Abnahmeprozesse verdeutlichen.	OHP	Alternativ können auch Museumsrundgang oder Gruppenpuzzle durchgeführt werden.

Vertiefung: Unterscheidung linearen und exponentiellen Wachstums anhand ihres Änderungsverhaltens. Bei der Diskussion der Malthus-Thesen kommt das Änderungsverhalten ins Spiel („weil Bevölkerung stärker wächst als...“).  Dies sollte Ausgangspunkt für die Variation des Blickes sein, also einerseits auf die Differenzen aufeinanderfolgender Folgenglieder und andererseits auf die Quotienten, mit dem Ziel der Erarbeitung der Begriffe **Änderung** und **Wachstumsfaktor.**	SM 1.6 Aufg. 8	PA UG
Sicherung: **Für die Wachstumsarten gibt es folgende konstante Größen:** Lineares Wachstum: $u(n)-u(n-1)=d$ **d: konstante Änderung** Exponentielles Wachstum: $\frac{u(n)}{u(n-1)}=k$ **k: konstanter Wachstumsfaktor**	Wissens- speicher	
Hausaufgabe: Hier treten Wachstumsmodelle in exaktem Gewand auf, Schüler sollen Umgang mit Differenzen und Quotienten üben und damit vertraut werden. Aufgabe vom Typ: *Wie lautet das nächste Folgenglied?* Komplexität (Knobelniveau) leicht ansteigend.	SM 1.6 Aufg. 9	

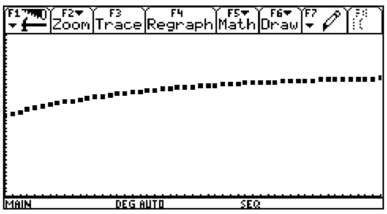
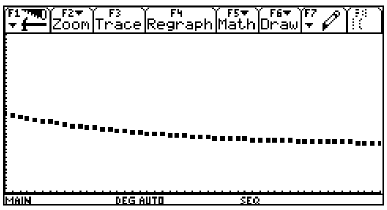
Ablauf der Stunden 7 bis 10

Inhalt	Medien	Kommentar
Übungen: Übungsaufgaben zum Änderungsverhalten. Modellieren: Aufstellen von unterschiedlichen Darstellungsformen.	SM 1.6 und 1.7	PA Von den Aufgaben 10 –15 soll eine Auswahl getroffen werden.
Kurzinformation zu den Aufgaben:		
Aufgabe 10 Wenn eine quadratische Funktion bei SM 1.1. auftauchte, dann ist die Frage nach deren Wachstumsverhalten sehr naheliegend. Wenn nicht, ist es auch naheliegend, nach dem Wachstum der für Schüler quadratischen Funktion zu fragen – als weiteres Beispiel eines Wachstumsvorgangs mit wieder anderem Änderungs-verhalten.		
Aufgabe 11 Während es in Aufgabe 10 tatsächlich immer ein trennscharf geeignetes Modell gibt (bis auf „x“), ist es hier bei diesem realen Datensatz umgekehrt. Alle Modelle passen in deskriptiver Hinsicht gleich gut, liefern aber gänzlich unterschiedliche Prognosen. Man weiß nichts über den Wirkzusammenhang, z. B. beim SM 1.1-Spiel („immer die Hälfte dazu“). Sinnvoll ist dann die Zugabe neuer realer Werte, z. B. (2002/376) und (2003/379).		
Aufgabe 12 Hier tauchen jetzt (fiktive) schmutzige Daten auf. Kein Modell passt mehr exakt. Die Schüler müssen vergleichen, abwägen und entscheiden.		Datensätze hier ‚didaktisiert’, man kann (sollte) vielleicht reale Datensätze nehmen.
Aufgabe 13 Wieder ist eine Auswahl und ein Vergleich geeigneter Modelle gefordert, aber auch Modellkritik: Das Modell beschreibt die Wachtumsvorgänge nur für einen begrenzten Zeitraum sinnvoll. Gründe für Abweichungen sollten in einem anschließenden Unterrichtsgespräch thematisiert werden.		
Aufgabe 14 Klassische Zinseszinsaufgabe		

Aufgabe 15 Auch hier ist Venetzung möglich: Die Wiederaufnahme von Bekanntem unter neuem Blickwinkel. Das Wissen, dass die Werte (schnell) konvergieren, hat Auswirkungen auf die Differenzen (streben gegen 0) und Quotienten (streben gegen 1). Wenn dies nicht antizipiert wird, kann es aber beim Untersuchen entdeckt und nachträglich einsichtig gemacht werden. Am Horizont ist hier also Infinitesimales zu entdecken, das beim begrenzten Wachstum wieder auftaucht und dort vielleicht auch anschaulich thematisiert werden kann (propädeutischer Grenzwertbegriff).		
Hausaufgabe: Lernprotokoll 1 Die Schüler können anhand vorgegebener Aufgaben ihren Wissensstand überprüfen.	SM S. 26 Selbsteinschätzung	

2: Begrenztes Wachstum	**Dauer:** 6 Stunden
Aus der Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum ergibt sich eine neue Form, die unter bestimmten Bedingungen gegen einen Grenzwert strebt. Das unterschiedliche Verhalten der Folge wird durch Variation der Parameter erkundet. Dabei werden der Begriff des Grenzwertes und der der Konvergenz eingeführt.	
Besondere Materialien/Technologie: LM 2.1 SM 2.1 bis 2.4	

Ablauf der Stunden 1 und 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: In der Aufgabe „Gartenteich“ wird zum ersten Mal eine Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum untersucht. Die beiden Effekte wirken gegeneinander. In diesem Fall entsteht ein Grenzwert.	SM 2.1 Aufg. 1 Blanko- folien	GA, Die Aufgabe ist selbst differenzierend gedacht.
Erarbeitung: • Hypothesen zur Entwicklung der Füllhöhe • Konkretes Szenario 5 % Verlust und 6 cm Zulauf. • Vergleich verschiedener Szenarien	Schüler- folien oder TC	Präsentation: minimales Ergebnis zuerst, dann ergänzen weitere Gruppen.
Sicherung: Für eine Sicherung verschiedener Szenarien ergeben sich als typische Graphen: 	TC OHP	UG
Rekursionsformel: $u(n) = u(n-1) + w \cdot u(n-1) + d;\ u(0) = ...$ *“Die Folgenglieder nähern sich mehr und mehr einem bestimmten Wert – dem Grenzwert.”* Der Grenzwert hängt vom Zulauf ab. Hier ist er die 20-fache Menge des Zulaufs.	Tafel	Tabellarische oder grafische Lösung
Vertiefung: • Vergleicht die neue Rekursionsformel mit den bekannten Wachstumsformeln. • Bestimmt und beschreibt die Änderung.		PA oder Ich-Du-Wir-Methode

Sicherung: Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum $u(n) = u(n-1) + \underbrace{w \cdot u(n-1)}_{\text{exponentieller Anteil}} + \underbrace{d}_{\text{linearer Anteil}};\ u(0) = ...$ Die Änderung setzt sich zusammen aus einem Teil proportional zum Bestand und einem konstanten Anteil (ist also eine lineare Funktion des Bestandes).	Tafel	
Hausaufgabe: Weiteres zusammengesetztes Wachstumsbeispiel	SM 2.1 Aufg. 2	Es werden nur die Teile a und b bearbeitet.

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe: **Vertiefung zu Teil a der Aufgabe 2:** Zusammenfassung der ausführlichen rekursiven Darstellung $u(n) = u(n-1) + w \cdot u(n-1) + d$ $\Rightarrow u(n) = (1+w) \cdot u(n-1) + d$ $\Rightarrow u(n) = k \cdot u(n-1) + d$	Tafel	UG mit Ausklammern des Faktors u(n-1) an der Tafel.
Vertiefung zu Teil b der Aufgabe 2: Herleitung des Grenzwertes (in dieser Aufgabe Grenzniveau genannt) Es bieten sich zwei Möglichkeiten an: (1) Betrachtung des Gleichgewichtszustandes von zugefügter und abgebauter Wirkstoffmenge. Hier: $w \cdot x = -d \Rightarrow 0{,}6 \cdot x = 200$ (2) Unter der Voraussetzung der Existenz eines Grenzwertes G gilt: $G = k \cdot G + d \Rightarrow G = 0{,}4 \cdot G + 200$	Tafel	Für Variante (2) muss vorher die Vertiefung zu Aufgabe 2a) erfolgen.
Ergänzung: Bei der Besprechung des Teiles c) der Aufgabe 2 ist eine tabellarische oder eine grafische Lösung angestrebt. Eine analytische Lösung ist nicht möglich, da keine explizite Darstellung für die Folge vorliegt.	TC	
Hausaufgabe: Forellenteichaufgabe	SM 2.1 Aufg. 3	Die Aufgabe erscheint analog zu 1 und 2, führt aber nicht auf eine konvergente Folge.

Ablauf der Stunde 4:

Inhalt	Medien	Kommentar
Besprechung der Hausaufgabe/Erarbeitung: Dieses Mal gibt es keine Stabilisierung. Es sind drei Fälle zu unterscheiden: 1. Entnahme < 30 Tiere: Bestand wächst über alle Grenzen. 2. Entnahme = 30 Tiere: Bestand konstant bei 200 Tieren. 3. Entnahme > 30 Tiere: Bestand stirbt aus. Vergleich mit den Beispielen der letzten Stunden: $u(n) = u(n-1) + w \cdot u(n-1) + d;\ \ u(0) = ...$ **Information:** Im Falle $-1 < w < 0$ bzw $0 < k < 1$ stabilisiert sich die Entwicklung um einen *Grenzbestand*. Man nennt dieses Wachstum ***begrenztes Wachstum.*** Im anderen Falle ergibt sich dann eine konstante Folge, wenn $d = -w \cdot u(0)$.	Tafel Folie LM 2.1	Abgrenzung des begrenzten Wachstums gegen die Kombination von linearem und exponentiellem Wachstum im Allgemeinen Vor der Berechnung eines Grenzwertes ist unbedingt die Existenz des Grenzwertes zu überprüfen.
Weitere Übungen: Aus den Aufgaben soll eine Auswahl getroffen werden. Dabei gilt: Begrenztes Wachstum A 4+7 Kombination linear/exponentiell A 5+6	SM 2.2 Aufg. 4 - 7	Zu Aufgabe 6 müssen ggf. Begriffe wie Tilgung etc. erläutert werden.
Hausaufgabe: Eine der Aufgaben 4 bis 7	SM 2.2 Aufg. 4 - 7	

Ablauf der Stunde 5:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Die Bearbeitung der Aufgabe liefert Beispielfolgen, deren Verhalten diskutiert wird.	SM 2.2 Aufg. 8	Ich-Du-Wir-Methode
Erarbeitung: Kategorisierung der Folgen aus Aufgabe 8 liefert zwei Fälle: • Die Folge stabilisiert sich nahe bei einem Wert. • Die Folge stabilisiert sich nicht (in den Beispielen steigt oder fällt sie über jede Grenze hinaus).		UG
Übung und Vertiefung: Aufgabe 9	SM 2.2 Aufg. 9	
Information: Eine Zahl G heißt Grenzwert der Folge u(n), wenn es für jeden noch so kleinen Abstand (in Aufgabe 9 zum Beispiel 0,0001) ein Folgenglied gibt, ab dem für alle nachfolgenden Folgenglieder der Abstand geringer ist. Man sagt dann, die Folge konvergiert. Die Folge kann nur gegen einen Grenzwert konvergieren.	Folie LM 2.1 eventuell weitere Beispiele auf View-screen	Information durch den Lehrer

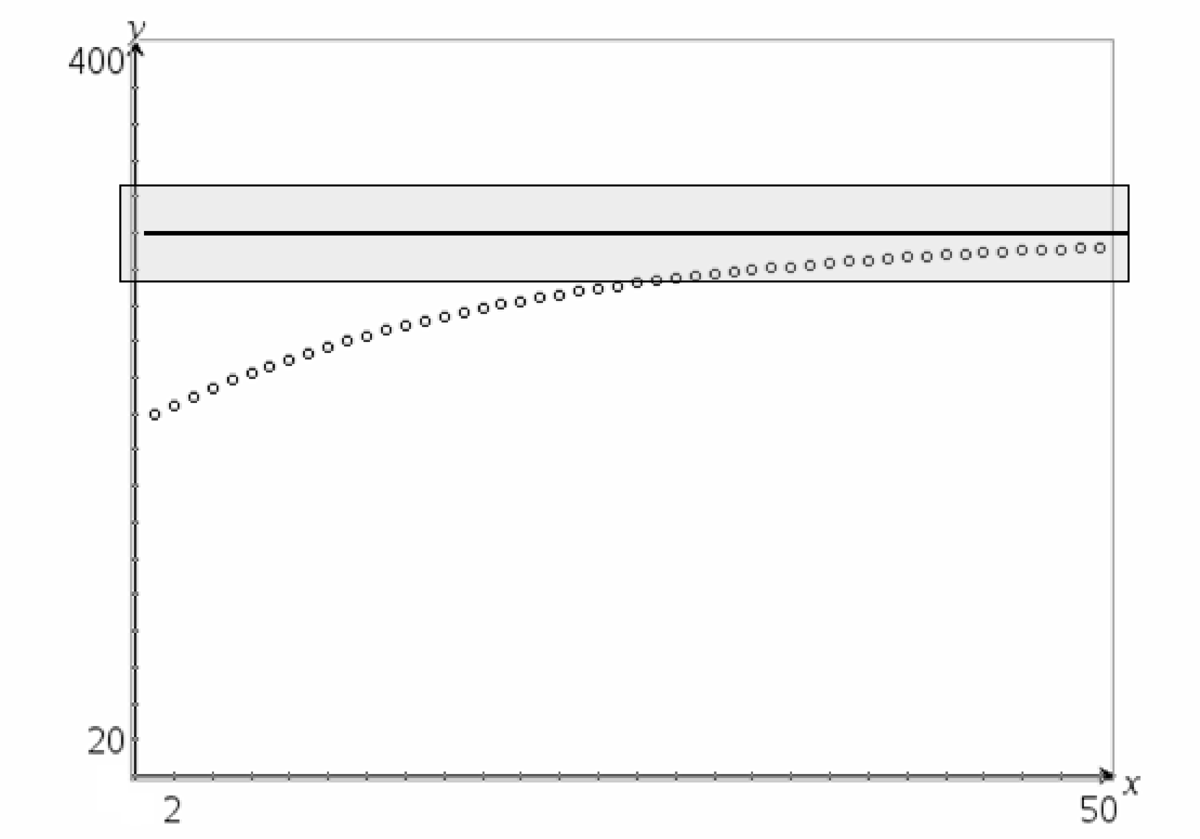
Ablauf der Stunde 6:

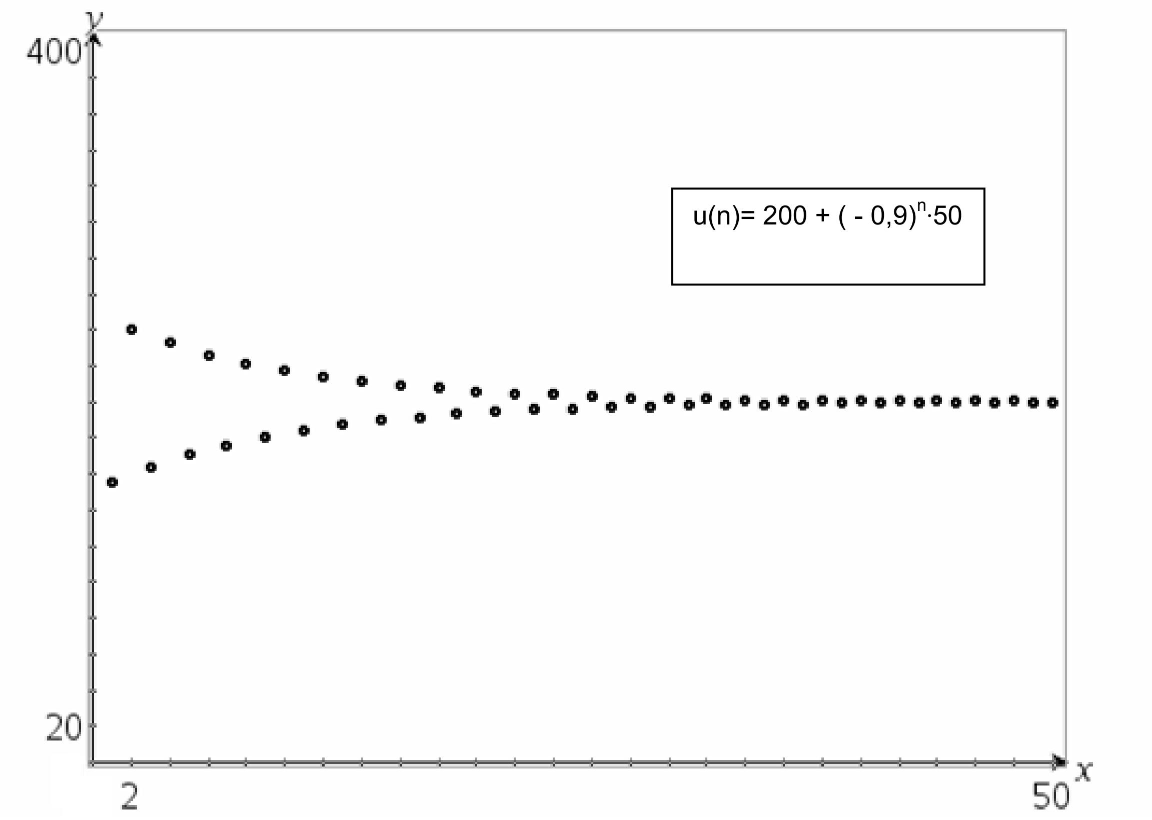
Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Einstieg: Mit Hilfe der Aufgabe 10 wird das Newtonsche Temperaturgesetz thematisiert. Es ergibt sich scheinbar eine neue Form von Wachstumsgleichung.	SM 2.3 Aufg. 10	optional: eigene Messung
Erarbeitung: Bearbeitung der Aufgabe 10	Blanko-folien	GA oder PA bieten sich an
Ergebnisvergleich: • Rekursionsformel: $u(n) = u(n-1) + 0{,}2 \cdot (40 - u(n-1)); \quad u(0) = 5$ • Entwicklung wie beim begrenzten Wachstum • Grenzwert bei Raumtemperatur 40°C • Einflussgrößen: Menge, Oberfläche, Gefäßmaterial Die neue Rekursionsformel stellt somit nur eine Variante der Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum dar. Ein Nachweis kann durch Umformung der Rekursionsformel erfolgen.	OHP, Folie, View-screen	Präsentation einzelner Gruppen Sicherung im UG

Vertiefung: Ähnlich wie beim begrenzten Wachstum aus den Aufgaben 1, 2 und 4 kann man auch hier im Graphen die Stabilisierung bei einem Grenzwert beobachten. In Aufgabe 11 soll diese Ähnlichkeit näher ausgeleuchtet werden.	SM 2.4 Aufg. 11	Mit Hilfe der Äquivalenz der Terme kann die Verwandtschaft der Bildungsgesetze nachgewiesen werden. Hieraus lässt sich auch der Grenzwert der Darstellung mit Hilfe von Überlagerung ableiten, der vorher der rekursiven Darstellung nicht anzusehen war.
Hausaufgabe: Aufgaben 12 oder 13 Aufgabe 13 ermöglicht eine Zusammenfassung des bisherigen Stoffes unter dem weiterführenden Aspekt der Modellierung	SM 2.4 Aufg. 12, 13	

LM 2.1

Grenzwert (Teich mit Leck und 15 cm Zulauf)





Thema 3: Einführung der Wachstumsfunktionen	**Dauer:** 3 Stunden
Nach der diskreten Betrachtung von Wachstumsfunktionen erfolgt nun die Erweiterung auf die Definitionsmenge IR . Diese erfolgt über die Frage nach „Zwischenwerten“. Hierzu werden in (bekannten) Zusammenhängen die Zeitabstände verkleinert, zu denen die Bestände bestimmt werden sollen.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 3.1 bis 3.3	

Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	Medien	Kommentar
ggf. Hausaufgabenbesprechung		
Einstieg: Am Beispiel eines Algenwachstums wird die Größe der von Algen bedeckten Fläche für beliebige Zeitpunkte bestimmt. Ausgehend von der rekursiven bzw. der expliziten Darstellung des exponentiellen Wachstums wird nach den Grenzen des rekursiven Modells gefragt und die Notwendigkeit einer funktionalen Darstellung für beliebige Zeitraume begründet. Nach einem wiederholenden Aspekt wird nach dem Bestand zu Zeitpunkten innerhalb der gegebenen Zeitintervalle gefragt.	SM 3.1 Aufg. 1	Teilaufgaben a) und b) in Einzelarbeit. Austausch über die Ergebnisse. Teilaufgaben c) und d) in Partnerarbeit.
Ergänzung und Ergebnissicherung: Ausgehend von den Schülerergebnissen wird die Erweiterung der Definitionsmenge erarbeitet und festgehalten: Es gibt Wachstumsvorgänge, die sich durch Funktionen mit $f(t) = a \cdot b^t$; $t \in IR$ beschreiben lassen. Solche Funktionen nennt man **Exponentialfunktionen**. b heisst Wachstumsfaktor. Für $b > 1$ werden die Bestände größer, für $0 < b < 1$ nehmen sie ab.	 Tafel	UG Wissensspeicher
Übung: Mit der wird der Abbau eines Medikaments im Körper beschrieben und untersucht. Damit wird die Berechnung von Größen für beliebige Zeiträume vertieft und im Zusammenhang eines Abnahmevorgangs vertieft.	SM 3.1 Aufg. 2	PA
Hausaufgabe Bearbeitung der Aufgabe 3	SM 3.1 Aufg. 3	Blankofolie für eine Präsentation

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe: Die Präsentation der Hausaufgabe kann zeitökonomisch unter Verwendung einer Folie durch Schüler erfolgen.	SM 3.1 Aufg. 3	
Einstieg: In der Aufgabe „Betriebsunfall“ wird die Lösung von Exponentialgleichungen thematisiert. Dazu sollen sich die Schüler zunächst in Einzelarbeit mit der Fragestellung befassen. Erst danach erfolgt ein Austausch mit dem Partner.	SM 3.1 Aufg. 4	Ich-Du (10 min/5 min)
Präsentation Vorstellung einzelner Lösungen durch Schülerinnen und Schüler		UG
Vertiefung und Sicherung Gegenübergestellt und ggf. ergänzt werden sollten: • grafischer Ansatz: die Graphen zu $f(x) = 275 \cdot 0{,}8^x$ und $g(x) = 80$ werden gezeichnet, der Schnittpunkt wird bestimmt und interpretiert. • „algebraischer Ansatz“: die Gleichung $275 \cdot 0{,}8^x = 80$ kann mit dem Rechner zwar auch im „exact-Modus“ mit dem solve-Befehl bearbeitet werden, die Ausgabe $x = \frac{\ln(55/16)}{\ln(5/4)}$ ist jedoch in diesem Unterrichtsgang nicht mit angemessenem Aufwand zu interpretieren. Vereinbarung: Gleichungen, in denen die Variable im Exponenten auftritt, heißen Exponentialgleichungen. Exponentialgleichungen können wir nur numerisch (tabellarisch, grafisch oder als Näherungslösung) lösen.	Tafel	Die Rechnerausgabe über den natürlichen Logarithmus wird nicht erklärt oder genutzt. Die folgenden Aufgaben setzen den Rahmen, in welchen Fällen Lösungen im Kopf bestimmt werden können. Für die Lösung ist der Rechner im ‚approximate’-Modus zu betreiben.
Übung: Lösen von einfachen Exponentialgleichungen im Kopf.	SM 3.2, Aufg. 5	

<table>
<tr><td colspan="3">Sicherung
Zur Lösung dieser einfachen Exponentialgleichungen stellt man die rechte Seite als Potenz der gegebenen Basis dar.</td><td></td><td rowspan="3">Nachdem ein Beispiel vom Lehrer vorgestellt wurde, können die weiteren Aufgaben von Schülern präsentiert werden.</td></tr>
<tr><td>$2^x = 8$
$8 = 2^3$
$x = 3$</td><td>$3^x = 9$
$9 = 3^2$
$x = 2$</td><td>$2^x = \frac{1}{4}$
$\frac{1}{4} = 2^{-2}$
$x = -2$</td><td rowspan="2">Tafel</td></tr>
<tr><td>$10^x = 1000$
$1000 = 10^3$
$x = 3$</td><td>$2^x = \sqrt{2}$
$\sqrt{2} = 2^{\frac{1}{2}}$
$x = \frac{1}{2}$</td><td>$10^x = 0{,}01$
$0{,}01 = 10^{-2}$
$x = -2$</td></tr>
<tr><td colspan="3">mögliche Hausaufgabe:
SM 3.2 Aufgaben 6 und 7</td><td>SM 3.2
Aufg. 6, 7</td><td></td></tr>
</table>

Ablauf der Stunde 3:

Einstieg: Durch Bearbeitung des Informationstextes wird der Begriff des Logarithmus als Umkehroperation eingeführt. Damit erfolgt eine erste Orientierung bezüglich dieses Begriffes.	SM 3.3 Informa- tion	Einzelarbeit
Erarbeitung: Im gemeinsamen Gespräch soll die Bedeutung des Logarithmus als Umkehroperation und der Umgang damit für alle gesichert werden. In diesem Zusammenhang können auch die schon bekannten Umkehroperationen (Addition-Subtraktion, Multiplikation-Division, Quadrieren-Wurzelziehen) zum Vergleich herangezogen werden. Anhand Aufgabe 1 wird die Berechnung mit dem Logarithmus gefestigt. Die Schülerinnen und Schüler geben dazu die Ergebnisse an und formulieren jeweils den Zusammenhang.	Tafel SM 3.3 Aufg. 1	UG
Übung: Aufgaben 2 und 3	SM 3.3 Aufg. 2, 3	EA
Sicherung: Angabe der Begründungen zu Aufgabe 2 Information durch den Lehrer: Der TC kann zur Kontrolle des Ergebnisses eingesetzt werden. Die Notation für $\log_b(a)$ ist dann log(a,b).	 TC-Hilfen	 Diese Schreibweise ist abhängig von der Betriebssystemversion.
Hausaufgabe: Aufgabe 4 von SM 3.3	SM 3.3 Aufg. 4	

Thema 4: Eigenschaften der Exponentialfunktion	**Dauer:** 3 Stunden
Anhand der Veränderungen des Graphen der Exponentialfunktion f mit $f(x) = b^x$ durch verschiedene Transformationen des Graphen werden die Eigenschaften der Exponentialfunktion hergeleitet.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 4.1 bis 4.5	

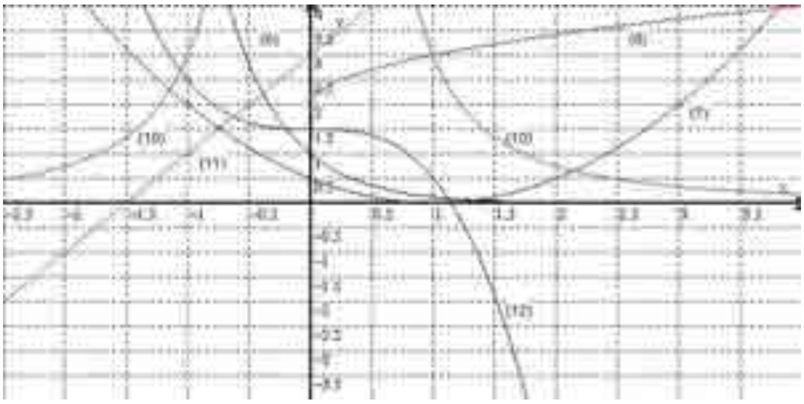
Ablauf der Stunde 1:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Erarbeitung: Mit den Aufgaben 1 und 2 wird die Wirkung der Parameter a und c in Exponentialfunktionen thematisiert: Aufgabe 1: Ausgehend von einem Vergleich zweier Exponentialfunktionen wird die Auswirkung des Vorfaktors a diskutiert und in einer allgemeinen Form notiert. Aufgabe 2: Bei der Lösung dieser Aufgabe muss deutlich werden, dass der Parameter „c“ in $f(x) = b^{x+c}$ auf den Vorfaktor „a“ bei $f(x) = a \cdot b^x$ zurückgeführt werden kann.	SM 4.1 Aufg. 1 und SM 4.2 Aufg. 2	PA Vergleich der Schüler-Lösungen
Sicherung: a) Der Vorfaktor „a“ in $f(x) = a \cdot b^x$ bewirkt ein Strecken oder Stauchen des Graphen in Richtung der y-Achse. b) $f(x) = b^{x+c} = b^x \cdot b^c = b^c \cdot b^x = a \cdot b^x$	Tafel	
Hausaufgabe: SM 4.2. Aufgabe 3	SM 4.2 Aufg. 3	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe: Vergleich der Ergebnisse und Klärung offener Fragen.		
Erarbeitung: Ausgehend von einem Vergleich der Graphen von Exponentialfunktionen werden die Eigenschaften dieser Funktionen untersucht, in einer allgemeinen Form notiert und gesichert.	SM 4.3 Aufg. 4	PA
Vertiefung: Die Aufgabe 5 dient der Vertiefung und Erweiterung der in Aufgaben 4 gefundenen Eigenschaften. Hinweis: Zur Lösung der Aufgabe 5d muss der Rechner auf den Modus „APPROXIMATE“ gestellt sein.	SM 4.3 Aufg. 5	
Hausaufgabe: Aufgabe 6	SM 4.3 Aufg. 6	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	**Medien**	**Kommentar**
Besprechung der Hausaufgabe:	Display	
Festigung: Aufgabe 7 wendet die in der letzten Stunde gefundenen Eigenschaften an und grenzt die Exponentialfunktion gegen frühere Funktionen ab. Lösungshinweise Aufgabe 7: a) (1) – A ; (2) – D ; (3) – F ; (4) – D ; (5) – F ; (9) – C b)  c) B: $y = 2 \cdot 0{,}25^x$ E: $y = -2x + 3$ G: $(x-1)^{-2} + 2$ H: $x^3 + 1{,}5$ Bei der Besprechung der Lösung sollte darauf geachtet werden, dass die Schüler den Zusammenhang zwischen der Abbildung des Graphen der Grundfunktion und der Veränderung des Terms beschreiben.	 SM 4.4 a, b Aufg. 7	 PA
Übung: Eine weitere Aufgabe des Aufgabenblattes SM 4.5: Sinnvoll wäre Aufgabe 9	 SM 4.5 Aufg. 8 – 11	 PA
Hausaufgabe: Bearbeitung ausgewählter Aufgaben des SM 4.5.	 SM 4.5	

Thema 5: **Erweiterung und Übungen**	**Dauer: 4** Stunden
In diesem Kapitel befinden sich Materialien, die im ersten Durchgang aus Zeitgründen entfallen mussten. Die Aufgaben sind sicherlich zur Klassenarbeitsvorbereitung geeignet.	
Besondere Materialien/Technologie: SM 5.1 bis 5.3	

Ablauf der Stunde 1:

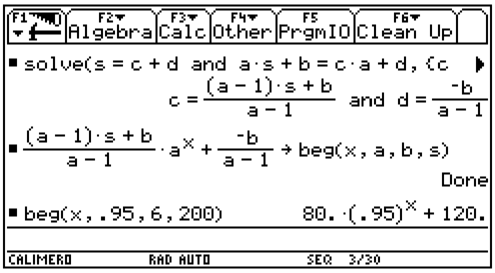
<table>
<tr><th>Inhalt</th><th>Medien</th><th>Kommentar</th></tr>
<tr>
<td>

Anmerkungen zu Aufgabe 1

a) Der übende Umgang mit Verschiebungen und Spiegelungen von Exponentialfunktionen führt zu einer Vernetzung mit dem vorgängig behandelten Wachstumsmodell des begrenzten Wachstums bzw. des Zufluss-Abfluss-Modells. Ziel ist die Ermittlung expliziter Formeln aus den rekursiven durch grafische und numerische Betrachtungen.

b) Mit der Prüfung, dass die gefundenen Funktionen die zugehörigen Rekursionsformeln erfüllen, ist der exakte Nachweis erbracht, dass Exponentialfunktionen tatsächlich Lösungsfunktionen zum begrenzten Wachstum sind.

c) Mögliche Arbeit mit TC:



<table>
<tr><th></th><th>Rekursionsformel</th><th>Explizite Formel</th></tr>
<tr><td>Vorteil</td><td>- Modellierung aus Sachzusammenhang gelingt nur rekursiv
- näher am Alltagsdenken</td><td>- Konkrete Werte direkt auch einfach ohne TC berechenbar
- Zwischenwerte</td></tr>
<tr><td>Nachteil</td><td>- Neue Werte setzen Berechnung aller alten Werte voraus (für TC geringer Nachteil).
- Scharen (Variation von Parametern) nicht darstellbar</td><td>Aus Kontext (Wasser im Teich/Forellen ...) kaum zu erschließen</td></tr>
</table>

</td>
<td>SM 5.1
Aufg. 1

Bezug zu Stunden 1 bis 3 von Abschnitt 2
(SM 2.1)</td>
<td>Die Aufgabe a) ist zunächst offen formuliert. Die Grenze kann bestimmt werden; wo keine ist, wird die Asymptote angegeben.
Mögliche Hilfen:

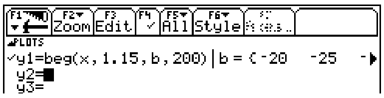
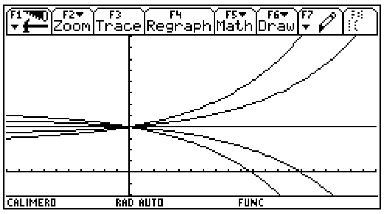
Der Wachstumsfaktor ist die Basis.

Die Grenze gibt Auskunft über die Asymptote.

Die Asymptote gibt Auskunft über die Verschiebung.

Benutze den Startwert für Berechnung von c.

Die Überprüfung in b) kann algebraisch im ‚home'-Editor erfolgen oder auch mit Tabellen.</td>
</tr>
</table>

Mögliche Hausaufgabe: Untersuche mit dem Makro die langfristige Entwicklung des Forellenbestandes aus (A3):   	SM 5.1 Aufg. 1	

Ablauf der Stunde 2:

Inhalt	Medien	Kommentar
Aufgaben zur Übung: Es wird jeweils eine der vier vergleichbaren Aufgaben 2a bis 2d in Gruppen bearbeitet. Die Aufgaben sollen sowohl mit einem rekursiven als auch mit einem funktionalen Ansatz gelöst werden. Der Vergleich der beiden Ansätze soll Gemeinsamkeiten wie Wachstumsfaktor und Anfangsbestand aufzeigen. Die Änderung der Zeiteinheit lenkt den Blick sowohl auf die Wahl des Ansatzes als auch auf die Auswirkung der Parameter.	SM 5.2 Aufg. 2	Arbeitsteilige GA Zeitaufwand für die Bearbeitung der Aufgaben ca. 20 min.
Auswertung: Bei der Aufgabe sollte Folgendes auch diskutiert werden: Besprechung der Gründe für einen rekursiven Ansatz: – diskreter Vorgang – keine Zwischenwerte gefragt Gründe für einen funktionalen Ansatz: – kontinuierlicher Vorgang – Zwischenwerte gefragt	OHP Rechner-display	Vorstellung der Arbeitsergebnisse
Hausaufgabe: Aufgabe 3 a, b	SM 5.3 Aufg. 3	

Ablauf der Stunde 3:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Die Schüler stellen die Lösung der Hausaufgabe vor. Bearbeitung der Aufgabe 3 c: Hierbei sollte beachtet werden: Die Interpolation der Werte der grafischen Darstellung der einzelnen Folgenglieder führt zu der Frage, wie sich geeignete Parameter einer Exponentialfunktion finden lassen.	 OHP SM 5.3 Aufg. 3 c	
Übungen: Bei ausreichender Zeit wird Aufgabe 4 bearbeitet.	 SM 5.3 Aufg. 4	 PA
Hausaufgabe:	 SM 5.3 Aufg. 5	

Ablauf der Stunde 4:

Inhalt	Medien	Kommentar
Einstieg: Besprechung der Hausaufgabe	 OHP	
Erarbeitung: Bearbeitung der Aufgaben 6 und 7 Aufgabe 6 thematisiert den Unterschied zwischen jährlicher und monatlicher Zinskapitalisierung. Dabei sollte der funktionale Aspekt im Vordergrund stehen. Aufgabe 7 legt den Fokus auf die Auswirkung der Parametervariation.	 SM 5.3 Aufg. 6 und 7	
Hausaufgabe: Keine, wegen des Abschlusses der Einheit		

6. Wissensspeicher

Zunahme- oder Abnahmeprozesse werden als Wachstumsvorgänge bezeichnet.
Wachstumsvorgänge können rekursiv oder explizit beschrieben werden. Die Darstellung gibt an, wie sich die wachsende Größe pro Zeiteinheit (z. B. in einem Jahr oder an einem Tag) verändert.
Durch die Darstellung ergibt sich eine Folge von Werten u(0), u(1), u(2) … .
u(0) ist der Startwert der Folge, u(1), u(2), … nennt man erstes, zweites, … Folgenglied.

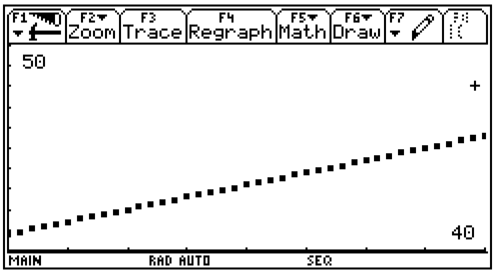
Lineares Wachstum

rekursive Darstellung:
$u(n) = u(n-1) + d; \quad u(0) = ...$
$u(n) - u(n-1) = d$
d: konstante Änderung

explizite Darstellung:
$u(n) = u(0) + d \cdot n$

Beispiel:
$u(n) = u(n-1) + 0{,}6$
$u(0) = 4$

n	0	1	2	3	
u(n)	4	4,6	5,2	5,8	



d > 0: Zunahmeprozess
d < 0: Abnahmeprozess

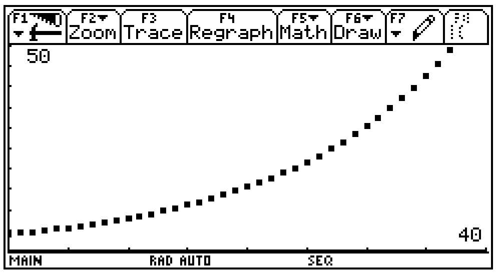
Exponentielles Wachstum

rekursive Darstellung:
$u(n) = k \cdot u(n-1); \quad u(0) = ...$
$\frac{u(n)}{u(n-1)} = k$
k: Wachstumsfaktor; u(0): Startwert

explizite Darstellung:
$u(n) = u(0) \cdot k^n$

Beispiel:
$u(n) = 1{,}07 \cdot u(n-1)$
$u(0) = 4$

n	0	1	2	3	
u(n)	4	4,28	4,5796	4,9002	



k > 1: Zunahmeprozess
0 < k < 1: Abnahmeprozess

Exponentielles und lineares Wachstum treten häufig in gleichzeitiger Überlagerung auf.

Formel: $u(n) = u(n-1) + \boxed{w \cdot u(n-1)} + \boxed{d}$ $\qquad u(n) = k \cdot u(n-1) + d$

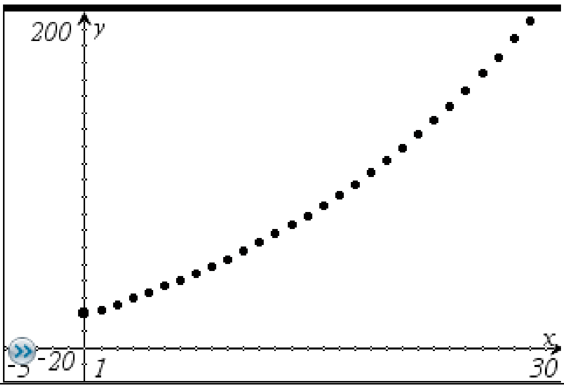
$\boxed{\text{Exponentiell}}$ $\boxed{\text{Linear}}$

Theoretisch können dann vier verschiedene Möglichkeiten auftreten:

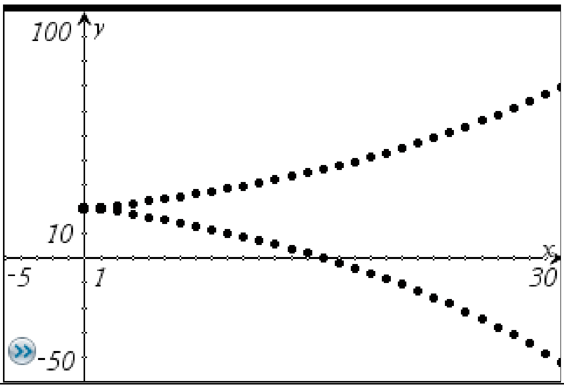
(1) Exponentielle Zunahme und lineare Zunahme [$w > 0$ bzw. $k > 1$; $d > 0$]
(2) Exponentielle Zunahme und lineare Abnahme [$w > 0$ bzw. $k > 1$; $d < 0$]
(3) Exponentielle Abnahme und lineare Zunahme [$w < 0$ bzw. $k < 1$; $d > 0$]
(4) Exponentielle Abnahme und lineare Abnahme [$w < 0$ bzw. $k < 1$; $d < 0$]

Für (1) und (4) lässt sich gedanklich erschließen, dass die Werte (Bestände) in (1) über alle Grenzen wachsen (Sparen plus konstante Einzahlung) und in (4) gegen $-\infty$ streben, die Bestände also aussterben (Wertverlust der Spareinlagen und konstante Auszahlungen).

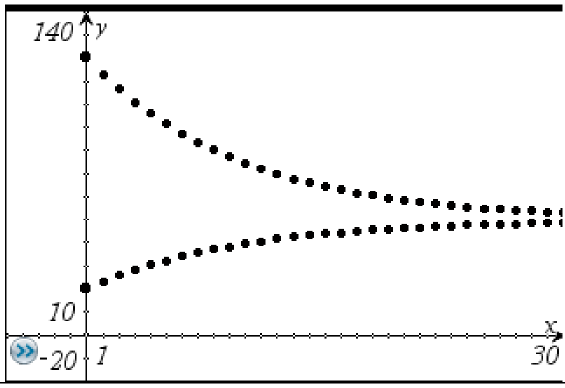
(1) $u(n) = 1{,}05 \cdot u(n-1) + 2$; $u(0) = 20$



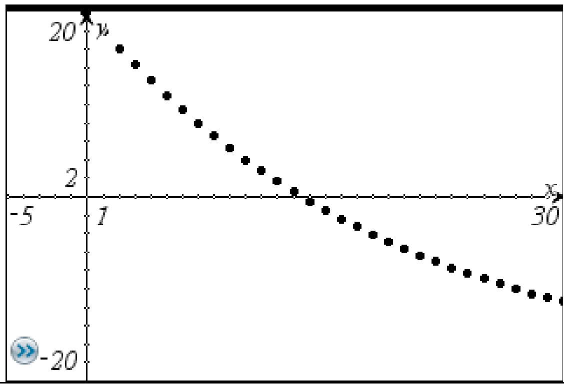
(2) $u(n) = 1{,}05 \cdot u(n-1) - 2$; $u(0) = 20$
$u(n) = 1{,}05 \cdot u(n-1) - 0{,}25$; $u(0) = 20$



(3) $u(n) = 0{,}9 \cdot u(n-1) + 5$; $u(0) = 20$
$u(0) = 120$



(4) $u(n) = 0{,}95 \cdot u(n-1) - 1$; $u(0) = 20$



(2) Je nach Größe des konstanten „Abfischens“ wächst der Bestand über alle Grenzen oder stirbt aus.
(3) Unabhängig vom Anfangsbestand (Startwert) nähert sich der Bestand einem Grenzbestand (Grenzwert). Dieses Wachstum heißt **begrenztes Wachstum**.

Berechnung des Grenzwertes G für begrenztes Wachstum
Betrachtung des Gleichgewichtszustandes von zugefügter und abgebauter Wirkstoffmenge.
$(1-k)\cdot G = d$ oder $G = k\cdot G + d$

Logarithmen
Sind y und b zwei positive Zahlen ($b \neq 0$), heißt die Zahl, mit der man b potenzieren muss, um y zu erhalten, der **Logarithmus von y zur Basis b**.
Schreibweise: $\mathbf{log_b(y)}$.

$$x = \log_b(y) \text{ und } b^x = y.$$

Beispiele:

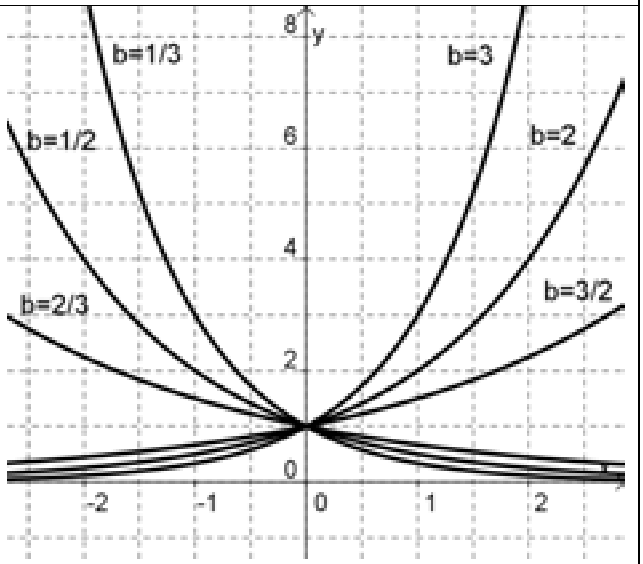
Löse $\mathbf{3^x = 243}$ bedeutet: Bestimme die Zahl, mit der man 3 potenzieren muss, damit sich 243 ergibt. Dafür schreibt man $\mathbf{x = log_3(243)}$.	Bestimme $\mathbf{log_2(32)}$ bedeutet: Bestimme die Zahl, mit der man 2 potenzieren muss, damit sich 32 ergibt. Gesucht ist also eine Zahl x, so dass gilt: $\mathbf{2^x = 32}$.

A: Eigenschaften von Exponentialfunktionen:

Für jede Exponentialfunktion zu $y = b^x$ mit $x \in \mathbb{R}$ und beliebiger positiver Basis $b \neq 1$ gilt:

- Der Graph
  - steigt für $b > 1$;
  - sinkt für $0 < b < 1$.
- Der Graph liegt oberhalb der x-Achse. Jede positive Zahl kommt als Funktionswert vor.
- Der Graph schmiegt sich
  - für $b > 1$ dem negativen Teil der x-Achse an,
  - für $0 < b < 1$ dem positiven Teil der x-Achse an.

  Die x-Achse ist **Asymptote**.
- Alle Graphen haben den Punkt $P(0\,|\,1)$ und nur diesen Punkt gemeinsam.



B: Verändern der Graphen von Exponentialfunktionen

Streckung/Stauchung in y-Richtung
Multiplikation mit Faktor a

$\boxed{y = a \cdot b^x}$

$a > 1$: Streckung
$0 < a < 1$: Stauchung

Streckung/Stauchung in x-Richtung
Multiplikation des Exponenten mit Faktor k

$\boxed{y = b^{k \cdot x}}$

$$y = b^{k \cdot x} = \left(b^k\right)^x = r^x$$

Ändern der Basis ist Streckung/Stauchung in x-Richtung.

Verschiebung in y-Richtung
Addition einer Konstanten e

$\boxed{y = b^x + e}$

Verschiebung in x-Richtung
Subtraktion einer Konstanten c im Exponenten

$\boxed{y = b^{x-c}}$

$$y = b^{x-c} = b^x \cdot b^{-c} = b^{-c} \cdot b^x = a \cdot b^x$$

Verschiebung in x-Richtung ist gleichzeitig Streckung/Stauchung in y-Richtung.

Spiegelung an der y-Achse
Multiplikation des Exponenten mit -1

$\boxed{y = b^{-x}}$

$$y = b^{-x} = \frac{1}{b^x} = \frac{1^x}{b^x} = \left(\frac{1}{b}\right)^x$$

Kehrwertbilden der Basis ist Spiegelung an der y-Achse.

Spiegelung an x-Achse
Multiplikation des gesamten Terms mit -1

$\boxed{y = -b^x}$

7. Selbsteinschätzung

Schätze deine Kenntnisse ein und mache ein Kreuz in der entsprechenden Spalte.

Ich kann	kann ich gut	muss ich noch üben	Ich brauche Hilfe
• anhand der Tabelle einer Zahlenfolge das Bildungsgesetz erkennen und in **Worten** beschreiben und fortsetzen. Beispiel: 3; 6; 12; 24; ... – ausgehend von der Zahl 3 wird verdoppelt			
• anhand der Tabelle einer Zahlenfolge das Bildungsgesetz erkennen und in **expliziter Darstellung** beschreiben und Werte berechnen. Beispiel: 5;7;9;11; ... – $u(n) = 5 + 2n$			
• anhand der Tabelle einer Zahlenfolge die **Änderung** erkennen und in **rekursiver Darstellung** beschreiben und Werte berechnen. Beispiel: 3; 6; 12; 24; ... – $u(n)=2\cdot u(n-1)$ mit $u(0) = 3$			
• anhand der Tabelle, der expliziten und rekursiven Darstellung die Zahlenfolge grafisch (auch mit TC) darstellen.			
• anhand einer der Darstellungsformen einer Zahlenfolge entscheiden, ob es sich um einen linearen, exponentiellen oder begrenzten Wachstumsvorgang handelt, und Anwendungsbeispiele für die einzelnen Wachstumsvorgänge nennen. Beispiele: lineares Wachstum: 10; 12; 14; ... (regelmäßig 2 € sparen) Exponentielles Wachstum: 10; 10,5; 11,025; ... (Zinseszinsrechnung) Begrenztes Wachstum: 74; 42; 26; 18; 14; ... (Temperatur-Abkühlung)			
• bei einem überlagerten Wachstumsvorgang den linearen und den exponentiellen Anteil identifizieren und entscheiden, ob es zu begrenztem Wachstum führt. Beispiel: exponentielle Abnahme + lineare Zunahme $u(n) = -0{,}2\cdot u(n-1) + u(n-1) + 100 = 100 + 0{,}8\cdot u(n-1)$			
• bei einer in expliziter Darstellung vorliegenden Zahlenfolge den **Grenzwert** abschätzen. Beispiel: $u(n) = (2n+1) / n = 2 + 1/n$; Grenzwert 2			
• kontinuierliche Wachstumsvorgänge durch Exponentialfunktionen darstellen. Beispiel: Stündliche Halbierung einer Menge (x : Zeit in h) → $f(x) = 0{,}5^x$			
• die Auswirkung der Addition eines konstanten Summanden zum Funktionsterm einer Exponentialfunktion oder die Multiplikation mit einem konstanten Faktor auf den Graphen der Exponentialfunktion beschreiben, erkennen und abschätzen. Beispiele: $f(x) = 2^x$ Verschiebung in y- Richtung: $g(x) = 2^x + 3$ Streckung in y- Richtung: $h(x) = 1{,}8\cdot 2^x$			
• eine Verschiebung des Graphen in x-Richtung mit einer Streckung in y-Richtung anhand der Potenzgesetze identifizieren. Beispiel: $f(x) = 2^{x+3} = 8\cdot 2^x$			
• den Zusammenhang zwischen der Spiegelung an der y-Achse und der Kehrwertbildung der Basis anhand der Potenzgesetze herstellen. Beispiel: $f(x)= 4^{-x} = 0{,}25^{x}$			
• den Graphen der Exponentialfunktion an der x-Achse spiegeln und zur Beschreibung des beschränkten Wachstums nutzen.			
• die Werte der Umkehrfunktion einer Exponentialfunktion in einfachen Fällen exakt, sonst näherungsweise bestimmen. Beispiele: $32= 2^x$ → $x=5$; $0{,}5 = 0{,}9^{x}$ → $x \approx 5{,}5$			
• mit der Schreibweise Logarithmus zu einer Basis b umgehen. Beispiele: $32= 2^x$ → $\log_2(32) = 5$			
• Textaufgaben bearbeiten, Sachzusammenhänge mathematisch beschreiben und geeignete Wachstumsmodelle anhand der Änderung auswählen.			
• mit den Taschenrechnereinstellungen für Folgen sicher umgehen (vgl. TC-Hilfen).			

8. Rechnerfreie Aufgaben

Aufgabe 1

a) In einer Zellkultur A wächst die Anzahl der Zellen je Stunde um 50 % der aktuellen Anzahl, in Zellkultur B verdoppelt sich die Anzahl je Stunde. Setze die Tabelle fort .

Zeit in h	0	1	2	3
Zellkultur A	4000			
Zellkultur B	1000			

b) Gib den Zusammenhang jeweils durch eine rekursive und explizite Darstellung an.

	Rekursive Darstellung	Startwert	Explizite Darstellung
Zellkultur A	a (n) =	a (0) =	a (n) =
Zellkultur B	b (n) =	b (0) =	b (n) =

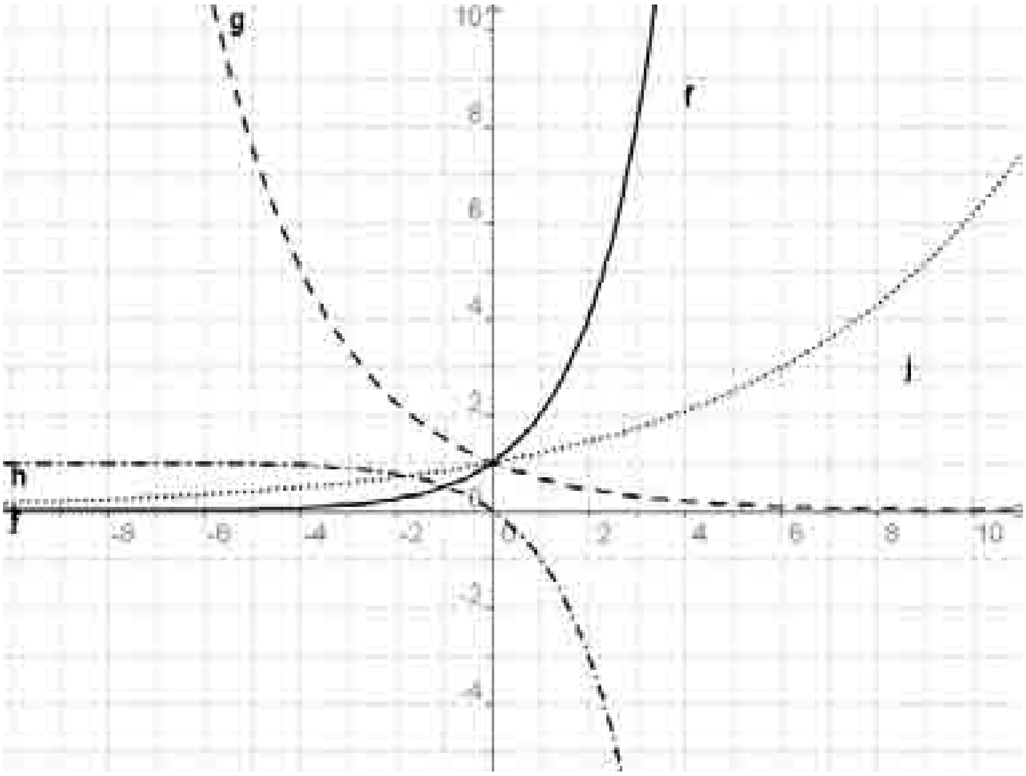
Aufgabe 2

a) Untersuche die folgenden Vorgänge in der Tabelle auf die Art des vorliegenden Wachstums und gib dazu nach Möglichkeit eine Rekursionsformel und eine explizite Darstellung an:

b) Skizziere den jeweiligen Verlauf des Wachstumsvorgangs qualitativ.

Anzahl der Zeiteinheiten	0	1	2	3
Vorgang A	7	9,5	12	14,5
Vorgang B	100	110	121	133,1
Vorgang C	80	50	35	27,5
Vorgang D	110	120	125	120

Aufgabe 3



Begründe, welche der vorgegebenen Funktionsgleichungen zu den oben dargestellten Graphen passen.

$p(x) = 3^x$	$q(x) = \square 2^x + 1$	$r(x) = 1{,}2^x$	$s(x) = 1{,}5^{\square x}$
$t(x) = \square 2^x \square 1$	$u(x) = 2^x$	$v(x) = 0{,}5^{\square x}$	$w(x) = \left(\frac{2}{3}\right)^x$

Aufgabe 4

Ein medizinischer Wirkstoff wird nach der Einnahme im menschlichen Körper so kontinuierlich abgebaut, dass nach jeweils einer Stunde noch 80 % der zuvor vorhandenen Menge vorhanden sind. Bestimme mithilfe einer Wertetabelle **näherungsweise** die Zeit ab Einnahme des Wirkstoffs, nach der noch die Hälfte der ursprünglichen Menge im Körper vorhanden ist.

Zeit in h	0	1	2				
Wirkstoffmenge in %	100						

9. Klassenarbeitsaufgaben

Aufgabe 1 Wachstumstypen und grafische Darstellungen

Gegeben sind vier Graphen, die Wachstumsprozesse beschreiben.

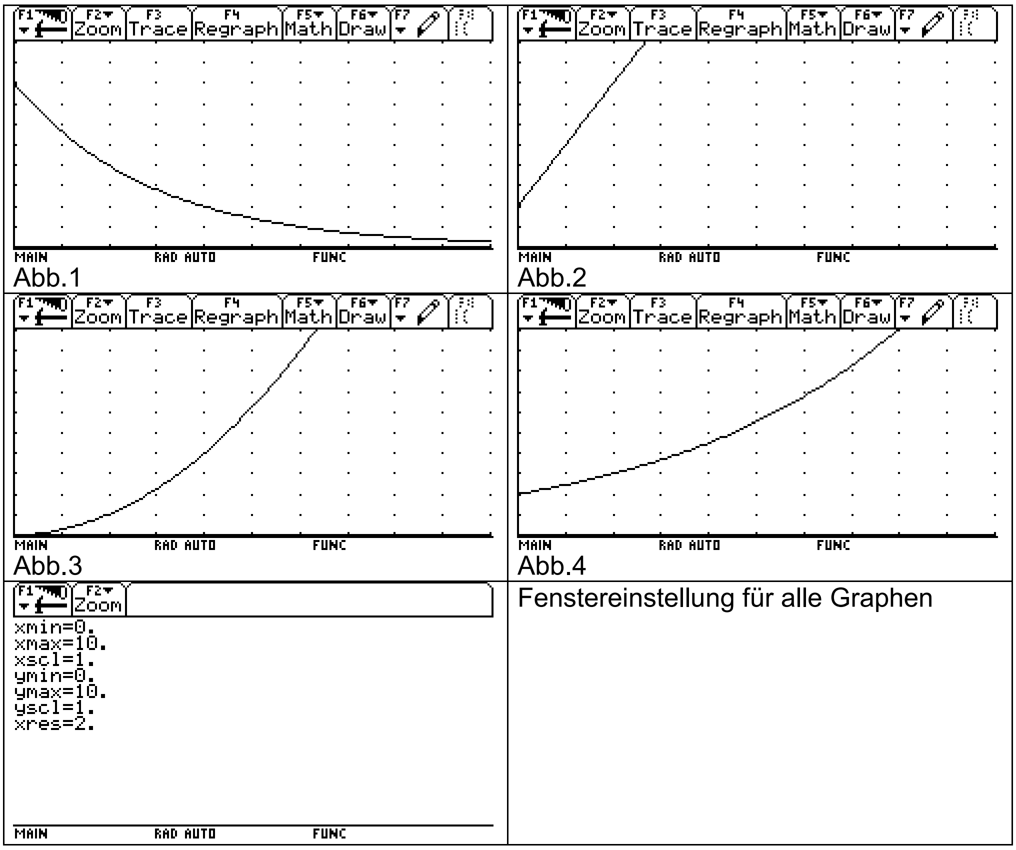


Abb.1 Abb.2 Abb.3 Abb.4

Fenstereinstellung für alle Graphen

a) Ordne die Graphen den Dir bekannten Wachstumstypen zu.
Bestimme für zwei selbst gewählte grafische Darstellungen eine möglichst passende Funktionsgleichung.

b) Durch die exponentielle Funktionsgleichung

$$f(x) = 4 \cdot 1{,}2^x$$

wird ein realer Sachverhalt beschrieben. Erläutere für die Funktion f die Bedeutung der Parameter a und b sowie der Variablen x und $f(x)$ in der allgemeinen Funktionsgleichung $f(x) = a \cdot b^x$.

Kommentar:
a) K5 im AFB I
b) K5 im AFB I
K5 im AFB II
c) K1 im AFB I

Aufgabe 2 **Privatrente** (Überlagerung von linearem und exponentiellem Wachstum)

Der sechzigjährige Herr Behrens erhält am 1. Juli eine Lebensversicherung von 40.000 € ausgezahlt. Er legt das Geld am selben Tag zu 6 % an mit dem Gedanken, jährlich 3.000 € für seinen Urlaub davon abzuheben.

a) Berechne seinen Kontostand am 1. Juli nach zwei Jahren.
b) Ermittle, in welchem Alter Herr Behrens sein Kapital vollständig aufgebraucht hat.
c) Erstaunt stellt Herr Behrens fest, dass er nach $\frac{2}{3}$ der Laufzeit seiner Privatrente immer noch mehr als die Hälfte seines eingesetzten Kapitals besitzt.
Finde eine Erklärung für dieses Phänomen.
d) Herr Behrens ist betrübt, dass er seinen Erben voraussichtlich nichts hinterlassen kann.
Bestimme die Höhe der erforderlichen Versicherungssumme so, dass sie unter sonst gleichen Bedingungen erhalten bleibt.

Kommentar:
Teil c) lässt in Abhängigkeit von der Darstellungsform verschiedene Begründungen zu (Tabelle: größer werdende Änderungsrate, Graph: stark abnehmende Steigung) und erfordert daher erhöhte Kompetenzen beim mathematisch Argumentieren (K1) und beim mathematisch Probleme lösen.)

Aufgabe 3 **Beschreiben der Ausbreitung eines Gerüchts rekursiv mit verschiedenen Ansätzen**

An einem Gymnasium mit $G = 998$ Schülern wird an einem heißen Julitag von einem Schüler das Gerücht verbreitet, dass es nach der 4. Stunde Hitzefrei gibt. Die Ausbreitung des Gerüchtes kann auf drei verschiedene Weisen mathematisch beschrieben werden, in denen $a(n)$ die Anzahl der Schüler ist, die zum Zeitpunkt n Kenntnis von dem Gerücht haben.

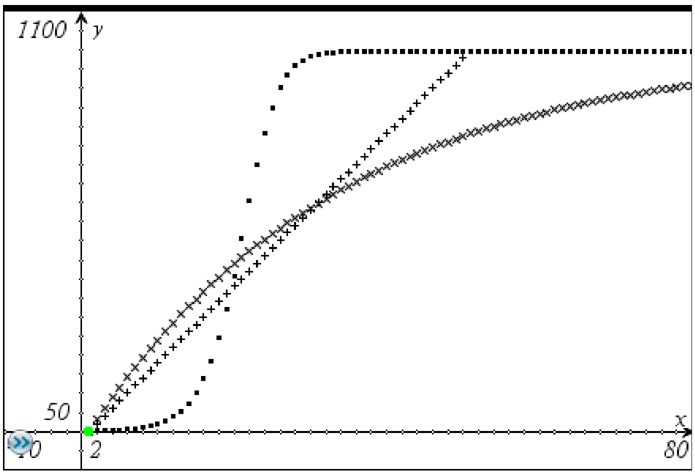
Beschreibung (1):
$a(n) = a(n-1) + 20$

Beschreibung (2):
$a(n) = a(n-1) + 0{,}03 \cdot (G - a(n-1))$

Beschreibung (3)
$a(n) = a(n-1) + 0{,}0004 \cdot a(n-1) \cdot (G - a(n-1))$

Jeweils gilt $a(0) = 1$.

Die Darstellung rechts zeigt die Graphen für die drei Beschreibungen.



- Ordne die Graphen begründet zu und beschreibe den Verlauf unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Situation.
- Erläutere für jede mathematische Beschreibung, welche Annahmen hinter dem Ansatz stehen.
- Bewerte die folgende Annahme unter Berücksichtigung der oben beschriebenen Situation: Als Zeiteinheit n wird eine Minute gewählt.

Kommentar:
Die Aufgabe wird durch die konkreteren Arbeitsaufträge und die vorgegebene grafische Darstellung einfacher.
K1 im AFB II und III K3 im AFB II K4 im AFB II K5 im AFB I
Der AFB III wird erreicht, wenn die rekursive Beschreibung von beschränktem und logistischem Wachstum im Unterricht nicht behandelt wurde.

Aufgabe 4

Bei einem Tauchvorgang in einem See werden der Druck und die Helligkeit gemessen. Es ergeben sich folgende Messtabellen:

Druck:

Tiefe (in m)		1	2	3	4	5
Druck (in hPa)		1100	1200	1300	1400	1500

Helligkeit:

Tiefe (im m)		1	2	3	4	5
Helligkeit (in klux)		27,5	15,1	8,3	4,6	2,5

a) Bestimme den Druck und die Helligkeit am Boden des Gewässers in 15 m Tiefe.
b) Gib jeweils auch eine Funktion an, die den Zusammenhang zwischen Tiefe und Druck bzw. Tiefe und Helligkeit wiedergibt.

Aufgabe 5

Das radioaktive Isotop Iod 131 wird insbesondere bei der medizinischen Untersuchung der Schilddrüse eingesetzt. Es hat eine physikalische Halbwertszeit von 8 Tagen, nach 8 Tagen ist also nur noch die Hälfte der ursprünglichen Menge vorhanden.

a) Bestimme, welcher Anteil nach 80 Tagen noch vorhanden ist.
b) Bestimme, welcher Anteil nach 4 Tagen / nach 1 Tag noch vorhanden ist.

Aufgabe 6

Aus Unachtsamkeit wird einem Patienten statt der vorgesehenen Dosis von 2 ml die 2,5-fache Menge eines Medikamentes, also 5 ml, gespritzt. Er soll daher so lange unter medizinischer Kontrolle bleiben, bis sich im Körper nur noch die ursprünglich vorgesehene Dosis von 2 ml befindet. Es wird davon ausgegangen, dass pro Stunde etwa 4 % des im Körper befindlichen Medikaments abgebaut und ausgeschieden werden.
Bestimme, wie lange der Patient unter Kontrolle bleiben muss.

Aufgabe 7

Herr Sparbier hat 10.000 €, die er langfristig anlegen möchte. Sein Ziel ist es, diesen Betrag zu verdoppeln.

a) Bestimme den jährlichen Zinssatz (auf 2 Nachkommastellen genau!), den er erhalten muss, damit er sein Ziel in 8 Jahren erreicht hat.
b) Seine Bank bietet ihm aber nur 4% an. Bestimme den Betrag, den er in jedem Jahr zusätzlich einzahlen muss, damit er sein Ziel 20.000 € dennoch nach 8 Jahren erreichen kann.

Das sollst Du im Kopf können

Aufgabe 1

a) Wie viele Flächen, Kanten und Ecken besitzt ein Tetraeder?

b) Für welche α im Bereich $-360° < \alpha < 360°$ gilt $\sin(\alpha) = 1$?

c) Gib die Formel zur Berechnung des Flächeninhaltes eines Trapezes an.

d) Schreibe alle Quadratzahlen der Zahlen von 10 bis 20 auf.

e) Gib die Gleichung einer Parabel mit den folgenden Eigenschaften an: Scheitelpunkt S(-4 | 1), Nullstellen bei x = -3 und x = -5.

f) Welches Bogenmaß entspricht einem Winkel von 60°?

g) Eine Auslegeware (Teppich) von 48 m² wiegt 68 kg. Wie viel wiegen 36 m²?

h) Berechne $5\tfrac{2}{5} - 2\tfrac{8}{10}$.

i) Wie verändert sich der Umfang eines Kreises, wenn seine Fläche einhundertmal größer wird?

j) Stelle die Zahl 10 im Zweiersystem dar.

Aufgabe 2

a) Gib den Funktionswert der Funktion mit $y = 2^{-x}$ an der Stelle x = 2 an.

b) Spiegele den Punkt P(0 | 1) an der Geraden y = -x .

c) Gib die Volumenformel einer Pyramide an.

d) Was bedeutet die römische Zahl MCMLXX?

e) Löse die Gleichung $\frac{12}{2x} = 5$ nach x auf.

f) Wo liegen die Nullstellen der Funktion $y = x^2 - 5x$?

g) Wie viel cm³ beinhaltet ein Kubikmeter?

h) Eine Küchenmaschine kostet nach einer Preiserhöhung von 20 % jetzt 240 Euro.
Wie viel hat sie vorher gekostet?

i) Ein quadratisches Beet mit einer Seitenlänge von 4 m soll mit quadratischen Betonplatten mit einer Seitenlänge von 40 cm eingerahmt werden. Wie viele Platten benötigt man?

j) Nenne alle Vierecksarten, bei denen sich die Diagonalen rechtwinklig schneiden.

Aufgabe 3

a) Berechne $7 \cdot (-2{,}6 - 3{,}4) : 2$

b) Die folgende Wertetabelle gehört zu einer quadratischen Funktion f:

x	0	1	2
f(x)	4	5	8

Gib den Funktionsterm an.

c) Kürze soweit wie möglich:

$\frac{32}{12}$; $-\frac{45}{15}$; $\frac{28}{21}$

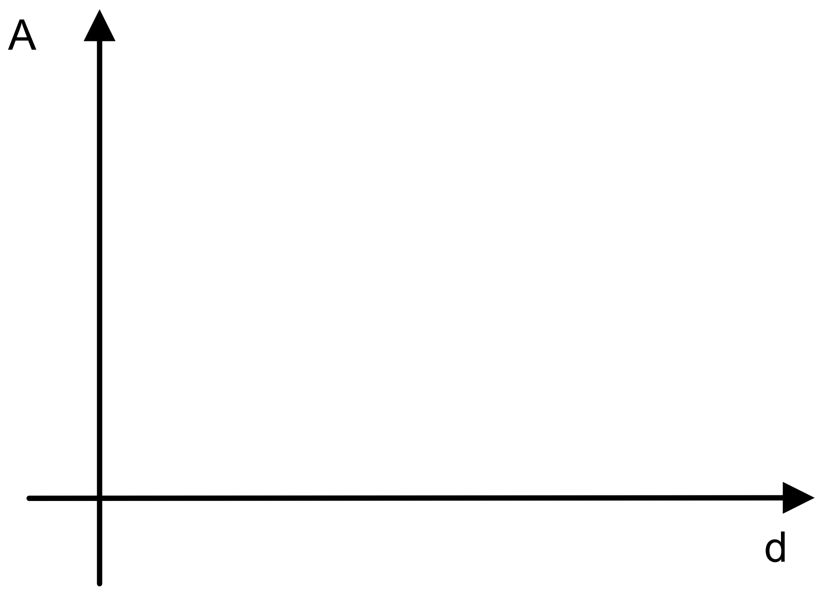
d) Für eine Jeans bezahlt man statt 40 Euro jetzt 45 Euro. Um wie viel Prozent ist der Preis gestiegen?

e) Es seien P(2;1) und Q(5;5). Berechne die Entfernung beider Punkte.

f) Welche Zahl muss man mit 1,5 multiplizieren, um 10,5 zu erhalten?

g) Bei einer Literpackung Milch werden Länge, Breite und Höhe verdoppelt.
Wie viel Milch passt in die neue Packung?

h) Vergrößert man den Durchmesser d eines Kreises, desto größer wird sein Flächeninhalt A.
Skizziere einen Graphen, der diese Abhängigkeit beschreibt



i) Vier Freunde vergleichen ihre Mathenoten. Drei der Noten lauten 2, 3 und 5. Der Durchschnitt ist 3,5.
Wie lautet die vierte Note?

j) Es sei $f(x) = x^2 + a$.
Gib jeweils eine Zahl a an, so dass f genau zwei bzw. genau eine bzw. keine Nullstellen hat.

Aufgabe 4

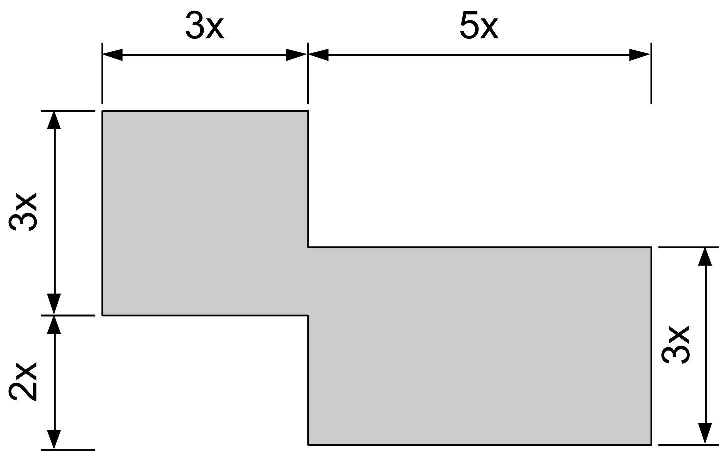
a) Löse die Klammer auf: $3 \cdot (-2 \cdot y + x)$ und $(a + 2 \cdot b) \cdot 1{,}2a$

b) Fünfzehn von achtzig Personen haben den Raum verlassen. Wie viel Prozent sind das?

c) Nenne die ersten 12 Quadratzahlen.

d) Der Losverkäufer gibt eine Gewinnchance von 90 % an. Hugo kauft vier Lose. Er behauptet: „Die Wahrscheinlichkeit, dass ich überhaupt keinen Gewinn habe, ist kleiner als ein Tausendstel.“ Stimmt das?

e) Welchen Umfang und Flächeninhalt hat die Figur?



f) Wenn man den Radius eines Kreises verdoppelt, dann ______________________ sich sein Umfang.

g) Fünf Kinokarten kosten 30 Euro. Wie viel kosten 8 Karten, wenn es ab 6 Karten einen Rabatt von 10 % gibt?

h) Berechne und schreibe als Dezimalbruch: $-2{,}8 + 3{,}2$; $1\frac{2}{5} - 3{,}5$; $\sqrt{0{,}01} \cdot 56$

i) Birgit fährt mit ihrem Fahrrad mit gleich bleibender Geschwindigkeit von 12 km/h. Wie lang ist die Strecke, die sie in 10 Minuten zurücklegt?

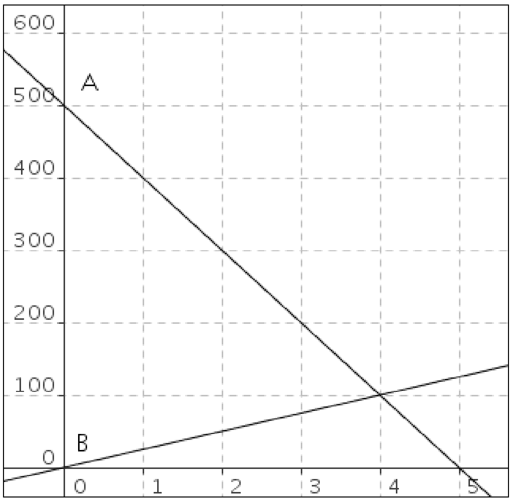
j) An welchen Stellen schneidet der Graph der Funktion $f(x) = (x-1)^2 - 2$ die beiden Achsen?

Aufgabe 5

a) Der Preis von einem Paar Schuhe ist von 80 Euro auf 76 Euro gefallen.
Wie viel Prozent beträgt der Preisnachlass?

b) Vereinfache, falls möglich: $x^2 \cdot x^3$; $x^2 + x^3$; $\frac{x^2}{x^3}$; $x^2 - x^3$

c) Ein Fußgänger und ein Radfahrer bewegen sich aufeinander zu. Dies wird durch folgende Graphen dargestellt, wobei x die Zeit in Minuten und y die Strecke in Metern angibt.



Wann treffen beide aufeinander?
Welcher Graph repräsentiert den Radfahrer?
Wie weit sind beide zwei Minuten nach dem Start voneinander entfernt?

d) Ziehe den Term 2 + 3x vom Term 2x + 3 ab.

e) 3 Eintrittskarten kosten 4,20 Euro. Wie viel kosten 5 Eintrittskarten?

f) Kürze soweit wie möglich: $\frac{20}{24}$; $\frac{25}{15}$; $\frac{72}{56}$

g) Berechne: 4 Fünftel von 60 Euro.

h) Kann ein Dreieck konstruiert werden, dessen Seitenlängen 5 cm, 9 cm und 6 cm betragen?

i) Eine Normalparabel mit Scheitelpunkt im Ursprung werde um den Faktor 3 gestreckt.
Gib ihre Funktionsgleichung an.

j) Löse die Klammer auf: $-3x \cdot (2xy - 4y)$

Aufgabe 6

a) Wie weit ist der Punkt P(-6 | -8) vom Ursprung entfernt?

b) Heidi bekommt auf ihr Sparguthaben von 120 Euro 3% Zinsen p.a.
Wie viel Geld hat sie am Ende des Jahres?

c) Ein Drittel einer Zahl ist um 5 größer als -6,5. Wie lautet die Zahl?

d) Gib die Größe als Dezimalzahl in mm an: $3 \cdot 10^{-2}$m, 21 µm, $1{,}2 \cdot 10^{-1}$mm.

e) Wie viele Lösungen hat die folgende Gleichung: $x^2 - 21 = 0$?

f) Klammere aus: $-12ab + 16a^2$

g) Ein Kreis habe einen Radius von 5 cm. Gib eine Schätzung für seinen Umfang an.

h) Welche Werte muss x haben, wenn der Term $\frac{3}{x} + 5$ die Werte 8 bzw. 5,5 bzw. 2 annimmt.

i) Berechne: $5 : \frac{1}{4}$

j) Fasse zusammen: $x^2 + 3x - 2x + 3x^2$

Das ist dein Basiswissen

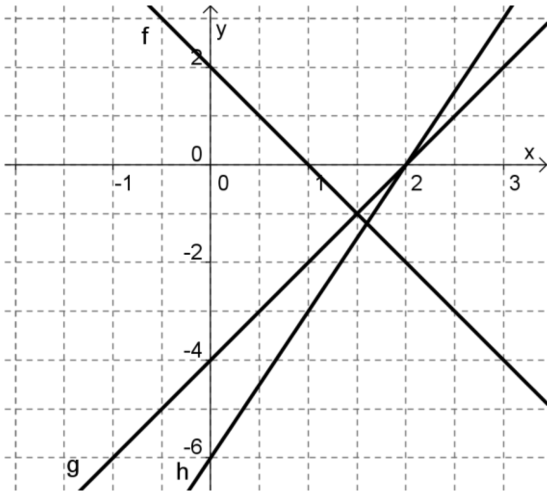
Aufgabe 1

a) Bestimme die Funktionsgleichungen zu den gegeben Graphen.

b) Wilhelm hat für den Funktionsterm zum Graphen von g folgende Gleichung gefunden: $g(x) = 2x - 4$.

Paul hat $g(x) = 2 \cdot (x - 2)$ herausbekommen.

Begründe, dass beide eine korrekte Funktionsgleichung aufgestellt haben, und erläutere, welche Sichtweisen jeweils zu den Lösungen führen.



Aufgabe 2

a) Bestimme die Funktionsgleichungen zu den gegeben Parabeln.

b) Erläutere die Bedeutung der Parameter in den drei dir bekannten Darstellungsformen quadratischer Funktionen.

$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ (allgemeine Form)

$f(x) = a \cdot (x - m) \cdot (x - n)$ (faktorisierte Form)

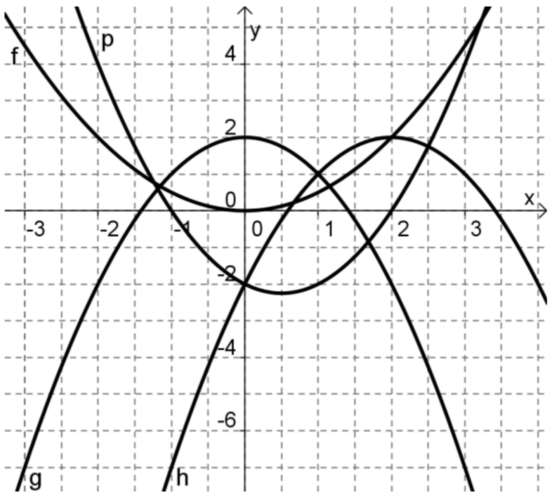
$f(x) = a \cdot (x - d)^2 + e$ (Scheitelpunktform)

c) Bestimme, falls möglich, die Nullstellen der Funktionen durch Umformen in die faktorisierte Form.

$f(x) = x^2 + 2x - 6$

$g(x) = 3 \cdot (x - 5)^2 - 5$

$h(x) = 3x^2 + 2x + 3$



d) Bestimme die Scheitelpunkte durch Umformen in die Scheitelpunktform.

$f(x) = (x - 3) \cdot (x - 7)$

$g(x) = 2x^2 + 2x - 3$

Aufgabe 3

a) Erläutere, was alle Parabeln mit der Gleichung $f(x) = (x - t)^2 + 1$ gemeinsam haben, wenn für t eine beliebige Zahl eingesetzt wird.

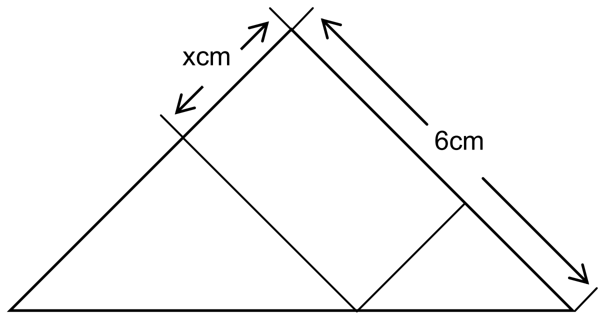
b) Bestimme den Wert b so, dass der Scheitelpunkt der Parabel mit $f(x) = x^2 - bx + 36$ auf der x-Achse liegt.

c) Schreibe als Term: „Das Produkt aus einer Zahl und der um 4 verminderten Zahl.“
Bestimme diejenige Zahl, für die der Term am kleinsten wird, und berechne das kleinste Produkt.

Aufgabe 4

In einer Fabrik fallen Blechstücke in Form von rechtwinklig gleichschenkligen Dreiecken mit Schenkellänge 6 cm an. Zur Verwertung sollen sie in möglichst große Rechtecke geschnitten werden.
Lehrling Franz schlägt vor, sie entsprechend der Skizze zu schneiden.

Ermittle begründet Länge, Breite und Flächeninhalt des größten auf diese Art schneidbaren Rechtecks!



Aufgabe 5

Der Anhalteweg eines Autos ist die gesamte Strecke, die ein Auto zurücklegt, um beim Erkennen einer Gefahr zum Stillstand gebracht zu werden. Der Anhalteweg setzt sich aus zwei Teilen zusammen: dem Reaktionsweg und dem Bremsweg. Der Reaktionsweg ist die Fahrstrecke, während der die Gefahr erkannt und das Bremspedal bedient wird, bis die Bremsen ansprechen. Erst am Ende des Reaktionsweges beginnt dann die eigentliche Bremsung. Der Weg, der dann noch zurückgelegt wird, bis das Fahrzeug steht, ist der Bremsweg.

Für den Reaktionsweg und den Bremsweg werden oft folgende Faustregeln angegeben:

(1) Der Reaktionsweg ist die Tachometeranzeige geteilt durch vier in Metern.
(2) Den Bremsweg erhält man, indem man von der Tachometeranzeige die Null am Ende streicht und das so erhaltene Ergebnis mit sich selbst malnimmt.

a) Berechne mit den Faustregeln Reaktions-, Brems- und Anhalteweg bei einer Geschwindigkeit von 50 km/h.
b) Formuliere beide Faustregeln als Formeln und gewinne daraus einen Term für den gesamten Anhalteweg als Funktion der Fahrzeuggeschwindigkeit x.
c) Die Einführung der Geschwindigkeitsbegrenzung in Wohngebieten hat zum Teil große Diskussionen ausgelöst. Bringt die Verminderung der Höchstgeschwindigkeit von 50 km/h auf 30 km/h überhaupt etwas?
d) Bestimme die Geschwindigkeit, bei der der Anhalteweg 100 Meter lang ist.

Aufgabe 6

a) Beschreibe das Heron-Verfahren zur Berechnung von Quadratwurzeln.
Berechne die ersten 5 Näherungswerte für $\sqrt{42}$.
b) Erläutere die Vorteile des Heron-Verfahrens gegenüber dem Intervallhalbierungsverfahren.

Aufgabe 7

Gegeben ist die Gleichung $3x^3 - 4x = \frac{2}{x}$.

a) Löse die Gleichung mit dem CAS algebraisch.
b) Bestimme die Lösung der Gleichung grafisch mit Hilfe des Taschenrechners.
Dokumentiere dein Vorgehen stichwortartig. Skizziere auch die Graphen.

Aufgabe 8

Gegeben ist die Gleichung $3x^3 - 4x = \frac{2}{x}$.

Bereits bei der Eingabe einfacher Terme mit Potenzen nimmt ein CAS sofort Termumformungen zur Vereinfachung vor.

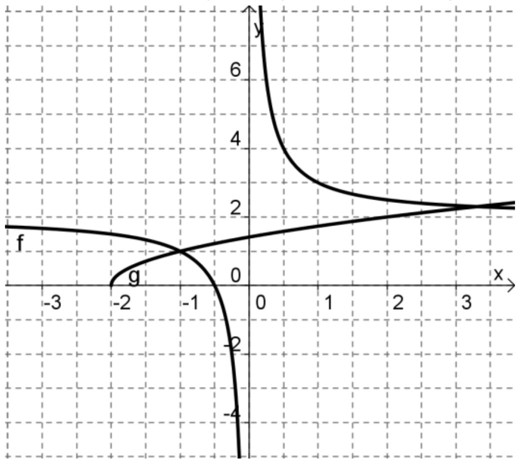
Gib folgende Terme ein, notiere die Ausgabe und erläutere die vom CAS vorgenommene Umformung.

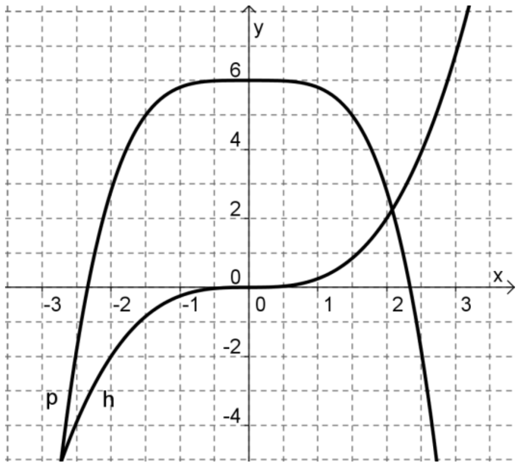
a) $\frac{a^4 + a^3}{a^2}$

b) $a^{n+1} \cdot a^{2n+3}$

Aufgabe 9

In den Diagrammen sind Graphen von Potenzfunktionen dargestellt.
Bestimme die zugehörigen Funktionsgleichungen.





Aufgabe 10

a) Auf einem Straßenschild ist die Länge s der Straße mit 9 km und die Steigung m mit 11 % angegeben. Bestimme den Höhenunterschied h und die horizontale Entfernung a.

b) Berechne die Länge einer Straße, die bei einer Steigung von 7 % eine horizontale Entfernung a von 10 km überwindet.

Aufgabe 11

Segelflugzeuge nutzen Aufwinde, um weite Strecken zurückzulegen. Wenn keine Aufwinde mehr zu finden sind, gleitet ein Segelflugzeug zu Boden. Dabei gibt die so genannte Gleitzahl an, wie viel Meter ein Flugzeug in ruhiger Luft pro zurückgelegten Meter sinkt. Sehr gute Segelflugzeuge erreichen dabei eine Gleitzahl von 1 : 50, was bedeutet, dass auf einer Strecke von 50 Metern einen Meter sinken.

a) Berechne den Gleitwinkel α, den ein Segelflugzeug mit einer Gleitzahl von 1 : 40 gegenüber dem horizontalen Flug einnimmt.

b) Auch Motorflugzeuge stürzen nach dem Motorausfall nicht einfach ab, sondern gleiten zu Boden. Die Gleitzahl eines Kleinflugzeugs vom Typ Cessna 172 beträgt ca. 1 : 10, die des Jumbo-Jets Boeing 747 ca. 1 : 17,5.
Berechne die Gleitwinkel beider Flugzeugtypen.
Kleinflugzeuge bewegen sich im Reiseflug auf einer Höhe von ca. 2.000 Fuß ($1\ \text{Fuß} \approx 0{,}305\ \text{Meter}$).
Berechne die Strecke, die das Flugzeug nach dem Ausfall eines Motors noch zurücklegen kann und die verbleibende Zeit bis zur Landung, wenn sich das Flugzeug mit einer Geschwindigkeit von ca. 100 km/h bewegt.
Führe die Berechnungen für die Boeing 747 durch, die sich auf einer Höhe von 10 km mit einer Geschwindigkeit von 400 km/h bewegt.

Calimero

Calimero

Teilnehmerinnen und Teilnehmer, die an der Erstellung der Materialien beteiligt sind

Name	Vorname	Dienststelle
Borggreve	Peter	Gymnasium Syke
Breidert	Lutz	Gymnasium Himmelsthür
Bremeier	Ulrich	Gymnasium Syke
Dierks	Andreas	Gymnasium Himmelsthür
Glaser	Torsten	Niedersächsisches Kultusministerium
Hagen	Marten	Gymnasium Papenburg
Körner	Henning	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Oldenburg
Kronabel	Edmund	Gymnasium Papenburg
Krüger	Ulf-Hermann	Gymnasium Syke
Lampe	Hans-Ulrich	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Stadthagen
Pinkernell	Guido	Technische Universität Darmstadt
Röhrkasten	Cornelia	Gymnasium Hankensbüttel
Rolfes	Rainer	Gymnasium Papenburg
Schlichting	Folkert	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Göttingen
Sperlich	Thomas	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Göttingen
Stenten-Langenbach	Hans-Dieter	Gymnasium Marianum Meppen
Stöber	Torsten	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Suhr	Friedrich	Gymnasium Johanneum Lüneburg
Toth-Hohmann	Anja	Gymnasium Hankensbüttel
Vehling	Reimund	Studienseminar für das Lehramt an Gymnasien Hannover II
Weißmann	Karin	Gymnasium Hankensbüttel
Wichmann	Achim	Gymnasium Georgianum Lingen
Wierzyk	Barbara	Gymnasium Johanneum Lüneburg

CAliMERO

Computer-Algebra im Mathematikunterricht: Entdecken, Rechnen, Organisieren

METHODISCHE UND DIDAKTISCHE HANDREICHUNG
BAND 8

Kontakt:

T^3 DEUTSCHLAND

www.t3deutschland.de

Kooperationspartner:

Texas Instruments

education.ti.com/deutschland

www.calimero.com